LAURENȚIU DUICAN - ILIE DUICAN

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

*

CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

Scanned with OKEN Scanner

LAURENȚIU DUICAN

ILIE DUICAN

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

(Culegere de probleme)

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
BUCUREȘTI, 1987

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT ÎNAINTE

Prezenta lucrare oferă elevilor din ciclul liceal un bogat material care să-i ajute în formarea deprinderilor de rezolvare a problemelor prin metode oferite de transformările geometrice, metode ce înlătură din rezolvare balastul calculelor, dînd largi posibilități de generalizare a soluțiilor.

Lucrarea cuprinde șapte capitole. La începutul fiecărei teme din capitol sînt prezentate sumar cîteva noțiuni teoretice, constînd din definirea noțiunilor și enunțarea teoremelor de bază, necesare pentru familiarizarea cititorului cu problemele care urmează. Nu am abordat o prezentare amănunțită a noțiunilor teoretice, deoarece scopul urmărit este de a da lucrării un caracter practic-aplicativ.

Pentru cititorul mai puțin obișnuit cu acest gen de probleme am prezentat în fiecare capitol (înainte de a trece la partea aplicativă) cîte un exemplu ce constituie un model de rezolvare metodică care poate servi drept ghid pentru soluționarea altor probleme de același gen.

Expunerea teoretică a fiecărei teme este urmată de probleme rezolvate, de așa natură ordonate încît să aprofundeze noțiunile teoretice, adîncind înțelegerea acestora și raportul dintre ele, dînd astfel fiecărei teme caracterul unei structuri.

În finalul fiecărei teme se propun spre rezolvare probleme cu grad de dificultate sporit, menite să atingă scopul lucrării.

Problemele de sinteză din capitolul VII lărgesc aria aplicabilității transformărilor prin folosirea în rezolvare în mod succesiv a mai multor tipuri de transformări. Aici problemele au un grad sporit de dificultate, ele adresîndu-se în mod deosebit elevilor participanți la fazele superioare ale

Scanned with OKEN Scanner

olimpiadelor de matematică și candidaților la examenul de admitere în învățământul superior.

Asupra diverselor noțiuni și teoreme de geometrie sintetică, cu care operează lucrarea, nu am insistat considerîndu-le familiare cititorului.

Culegerea conține probleme selecționate din Gazeta Matematică, din reviste și diverse lucrări de specialitate, probleme reformulate în spiritul manualelor și programei școlare, precum și probleme concepute de autori, ordonate conform structurii lucrării și gradului de dificultate pe care le prezintă.

În elaborarea lucrării a existat o permanentă colaborare a autorilor ei: Laurențiu I. Duican, autor principal, student al Facultății de Automatică din București și Ilie Duican, profesor gradul I.

Această culegere prezintă interes pentru elevii din licee, este utilă profesorilor pentru activitatea la clasă și cea de perfecționare.

Autorii

NOTAȚII UTILIZATE

AB	= dreapta determinată de punctele A și B.
$\|AB\|$	= segment de dreaptă de extremități A și B.
$\|AB$	= semidreapta deschisă, cu originea A, care conține punctul B.
$\|\|AB\|\|$	= lungimea segmentului $\|AB\|$.
$\widehat{hk}$	= unghi având ca laturi semidreptele h și k.
$\widehat{AOB}$ (sau $\widehat{LOA}$)	= unghi având ca laturi semidreptele $\|OA$ și $\|OB$.
măs $(\widehat{\alpha})$	= α (măsura unghiului $\widehat{\alpha}$ exprimată în grade).
$d(O, AB)$	= distanța de la punctul O la dreapta AB.
$A_1A_2\ldots A_n$	= poligonul cu vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
$\mathscr{C}(O, r)$	= cercul de centru O și raza r.
E^2 (sau π)	= planul euclidian.
E^3 (sau S)	= spațiul euclidian tridimensional.
$\|dA$	= semiplanul deschis limitat de dreapta d, care conține punctul A.
(ABC)	= planul determinat de punctele A, B și C.
$\mathscr{S}(O, r)$	= sfera de centru O și raza r.
$\|AB\| \equiv \|A'B'\|$	= relația de congreuență „segmentul $\|AB\|$ congruent cu segmentul $\|A'B'\|$“
$d \perp d'$	= relația de perpendicularitate.
$d \parallel d'$	= relația de paralelism.
$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$	= relația de echipolență (vectorul $\overrightarrow{AB}$ echipolent cu vectorul $\overrightarrow{A'B'}$).
$pr_d \circ A$	= proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta d.
$A \in d$	= punctul A aparține dreptei d.
$\{A\} = d \cap d'$ =	= punctul A este intersecția dreptelor d și d'.
măs $(\widehat{hk})$	= măsura unui unghi având ca laturi semidreptele h, k.
$d(A, B)$	= distanța dintre punctele A, B.
$A' = T(A)$	= imaginea unui punct A prin transformarea T.
T^{-1}	= inversa transformării T.
I	= transformarea identică.
TS (sau $T \circ S$)	= produsul transformărilor S, T (se aplică S apoi T).

Scanned with OKEN Scanner

$T_{\vec{v}}$ = translația de vector $\vec{v}$.

S_O = simetria de centru O.

S_Δ = simetria în raport cu dreapta Δ.

$R(O, \alpha)$ = rotația de centru O și unghi de măsură α.

$H(C, k)$ = omotetia de centru C și raport k.

$I(O, r)$ = inversiunea de pol O și putere r.

$M' = T_{\vec{v}}(M)$ = punctul M' este imaginea punctului M prin translația de vector $\vec{v}$.

$M' = S_{(O)}(M)$ = punctul M' este imaginea punctului M prin simetria de centru O.

$M' = R_{(O,\alpha)}(M)$ = punctul M' este imaginea punctului M prin rotația de centru O și unghi de măsură α.

$M' = H_{(C,k)}(M)$ = punctul M' este imaginea punctului M prin omotetia de centru C și raport k.

$M' = I_{(O,r)}(M)$ = punctul M' este imaginea punctului M prin inversiunea de pol O și putere r.

$\forall X$ = oricare ar fi X.

$\vee$ = (sau) disjuncție.

$\wedge$ = (și) conjuncție.

$A \in B$ = A aparține lui B.

$A \notin B$ = A nu aparține lui B.

$A \subset B$ = simbolul de incluziune, mulțimea A este inclusă în mulțimea B.

$A \supset B$ = mulțimea A include mulțimea B.

$A \cup B$ = $\{x \mid x \in A, \vee\, x \in B\}$.

$A \cap B$ = $\{x \mid x \in A, \wedge\, x \in B\}$.

$A \setminus B$ = $\{x \mid x \in A, x \notin B\}$.

$A \Rightarrow B$ = simbolul implicației, propoziția A implică propoziția B.

$A \Leftrightarrow B$ = simbolul echivalenței logice, propoziția A este echivalentă cu propoziția B; aceasta înseamnă $A \Rightarrow B$ și $B \Rightarrow A$.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Cuvînt înainte 5
Notaţii utilizate 7

Capitolul I 11

1. Izometria 11
2. Probleme rezolvate 14
3. Probleme propuse 18
Soluţii. Indicaţii 19

Capitolul II 24

1. Translaţia 24
2. Probleme rezolvate 27
3. Probleme propuse 36
Soluţii. Indicaţii 38

Capitolul III 45

1. Rotaţia 45
2. Probleme rezolvate 47
3. Probleme propuse 56
Soluţii. Indicaţii 59

Capitolul IV 68

1. Simetria 68
2. Probleme rezolvate 71
3. Probleme propuse 90
Soluţii. Indicaţii 92

Capitolul V 103

1. Omotetia 103
2. Probleme rezolvate 106
3. Probleme propuse 122
Soluţii. Indicaţii 124

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI 135

1. Inversiunea 135*
2. Probleme rezolvate 138
3. Probleme propuse 153

Soluții. Indicații 155

Capitolul VII 164

Probleme de sinteză 164

Soluții. Indicații 169

Bibliografie 207

Scanned with OKEN Scanner

1. IZOMETRIA

Considerăm două figuri geometrice (două submulțimi nevide ale spațiului geometric*) F și F'. Orice funcție $T : F \to F'$ este o transformare. Deci transformarea T este denumirea geometrică a funcției. Dacă funcția T este surjectivă, adică $T(F) = F'$, spunem că T transformă figura F în figura F'.

Transformarea T a figurii F în figura F' asociază fiecărui punct M al figurii F un punct $M' = T(M)$ al figurii F'. Punctul $M' = T(M)$ se numește transformatul punctului M sau imaginea punctului M prin transformarea T.

Transformările unui grup lasă neschimbate o parte din proprietățile figurilor. Aceste proprietăți constituie invarianții grupului respectiv.

Pentru a nu fi legați de un anumit tip de figuri geometrice vom studia inițial cîteva tipuri de transformări geometrice (izometrii, translații, simetrii și rotații), care păstrează forma și mărimea fiecărui element al figurii transformate. Pentru aceasta vom defini noțiunea de distanță deoarece ea constituie invariantul fundamental al transformărilor respective.

Fie $\mathcal{M}$ o mulțime nevidă. Se numește *distanță* pe mulțimea $\mathcal{M}$ orice funcție $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ($\mathcal{M} \times \mathcal{M} = \{(A, B) | A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}\}$) care satisface următoarele condiții :

1) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
2) $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in \mathcal{M}$;
3) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C), \forall A, B, C \in \mathcal{M}$.

* Spațiul geometric este o mulțime nevidă ale cărei elemente se numesc puncte. Ea are toate proprietățile pe care le cunoaștem de la teoria mulțimilor.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.1. Fie $(\mathcal{M}, d)$ și $(\mathcal{M}', d')$ două spații metrice*. Numim *izometrie* orice funcție bijectivă $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ care conservă distanța, adică

$$d(A, B) = d'(T(A), T(B)), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}.$$

Un exemplu de spațiu metric este planul euclidian E^2, cardinal echivalent cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ înzestrat cu distanța

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

unde

$$A = (x_1, y_1) \text{ și } B = (x_2, y_2).$$

Teorema 1.1. *Izometriile unui spațiu metric alcătuiesc grup în raport cu operația de compunere.*

Teorema 1.2 *Dacă o izometrie T a planului E^2 admite punctele distincte A și B drept puncte fixe, atunci orice punct P al dreptei AB este punct fix; o izometrie T a planului E^2 în el însuși ce admite trei puncte fixe necoliniare A, B, C este transformarea identică.*

Teorema 1.3. *Orice izometrie T a unui plan euclidian conservă relațiile «a fi coliniare» și «a fi între»; imaginea prin T a unei drepte, semidrepte, a unui segment de dreaptă, a unui cerc, arc de cerc, plan, semiplan este, respectiv, o mulțime caracterizată prin aceeași denumire.*

Vom prezenta cîteva proprietăți ale transformărilor geometrice. O serie de alte proprietăți sau teoreme au fost propuse ca aplicații sau rezultă din conținutul unor probleme în alcătuirea cărora au fost folosite.

1. Orice izometrie păstrează coliniaritatea.

Demonstrație. Fie T o izometrie iar A, B și C trei puncte distincte care aparțin dreptei d. În ipoteza că B se află între A și C avem : $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$. Transformarea T fiind o izometrie vom avea : $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ și $C' = T(C)$. Deci vom avea și $d(A', B') + d(B', C') = d(A', C')$, de unde rezultă că punctele A', B' și C' sînt coliniare.

2. Dacă T este o izometrie, iar d o dreaptă, atunci mulțimea $T(\mathrm{d}) = \{T(M), \ M \in \mathrm{d}\}$ este de asemenea o dreaptă .

---

* Un spațiu metric este o mulțime (nevidă) pe care s-a definit o distanță.

Scanned with OKEN Scanner

3. Orice izometrie păstrează paralelismul dreptelor.

Demonstrație. Fie o izometrie T și dreptele $d_1 \parallel d_2$. Fie $d_1' = T(d_1)$ și $d_2' = T(d_2)$ imaginile dreptelor d_1 și d_2 prin izometria T. Presupunem că dreptele d_1' și d_2' nu sînt paralele. Atunci există un punct M' astfel ca $d_1' \cap d_2' = \{M'\}$. Punctul M' trebuie să fie imaginea unui punct M ce aparține fiecăreia din dreptele d_1 și d_2, lucru imposibil deoarece prin ipoteză $d_1 \parallel d_2$.

4. Dacă T este o izometrie și dacă :

— r este un segment de dreaptă, atunci $T(r)$ este un segment de dreaptă ;

— s este o semidreaptă, atunci $T(s)$ este o semidreaptă ;

— p este un semiplan, atunci $T(p)$ este un semiplan.

Pentru demonstrație se ține seama de proprietățile precedente și de definițiile segmentului de dreaptă, semidreptei și semiplanului.

5. Dacă T este o izometrie și dacă $\widehat{hk}$ este un unghi, atunci $T(\widehat{hk})$ este un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$.

6. Orice izometrie a planului E^2 este o aplicație liniară de forma $x' = ax + by + c$, $y' = dx + ey + f$, unde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

este o matrice ortogonală, adică $a^2 + b^2 = 1$, $ad + be = 0$ și $d^2 + e^2 = 1$; $A(x,y)$ are ca imagine pe $T(A) = A'(x', y')$.

7. Orice izometrie a spațiului euclidian E^3 este o aplicație liniară de forma

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3,$$

unde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

este o matrice ortogonală, adică

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,$$
$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$
$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$$

2. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se demonstreze că orice izometrie a planului E^2 este o aplicație bijectivă.

Soluție. Fie izometria $T: E^2 \to E^2$. Să arătăm că T este o aplicație injectivă. Presupunem că punctele distincte A și B au aceeași imagine prin izometria T. Deoarece $d(T(A), T(B)) = 0$, atunci $d(A, B) = 0$, ceea ce contrazice faptul că A și B sînt distincte.

Aplicația T este surjectivă întrucît sistemul liniar

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

admite soluție, ceea ce rezultă din faptul că

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0;$$ (vezi proprietatea 6).

2. Să se demonstreze că orice izometrie $T: E^3 \to E^3$ este o aplicație surjectivă.

Soluție. Fie izometria $T: E^3 \to E^3$. Să arătăm că aplicația T este o surjecție. Aceasta rezultă din faptul că sistemul

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3,$$

Scanned with OKEN Scanner

admite soluție, întrucît

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\,;$$ (vezi proprietatea 7).

3. Să se demonstreze că mulțimea tuturor izometriilor unui plan formează grup în raport cu operația de compunere.

Soluție. Vom nota cu $\mathcal{T}$ mulțimea tuturor izometriilor care fac să corespundă punctelor planului E^2 punctele aceluiași plan. Izometriile mulțimii $\mathcal{T}$ le vom nota cu $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$ Fie T_1, T_2 două izometrii din $\mathcal{T}$ și A, B puncte din planul E^2. Imaginile lor prin izometria T_1, respectiv, T_2 vor fi :

$$A_1 = T_1(A) \text{ și } B_1 = T_1(B);$$

$$A_2 = T_2(A) \text{ și } B_2 = T_2(B).$$

Aplicăm punctelor A și B, în mod succesiv, T_1 și T_2. Aplicînd izometria T_1 obținem

$$A_1 = T_1(A) \text{ și } B_1 = T_1(B). \tag{1}$$

Aplicînd acestora izometria T_2 obținem

$$A_1' = T_2(A_1) \text{ și } B_1' = T_2(B_1), \tag{2}$$

pe care, dacă ținem cont de (1), le putem scrie astfel :

$$A_1' = T_2(T_1(A)) \text{ și } B_1' = T_2(T_1(B)).$$

Observăm că, după aplicarea succesivă a celor două izometrii, am obținut o nouă corespondență care face ca imaginile punctelor A și B să fie A_1' și B_1'. Această corespondență se numește *compunerea* izometriilor T_1 și T_2, care se notează cu T_2T_1 (sau $T_2 \circ T_1$).

a) Produsul a două izometrii este o izometrie.

Fie A și B două puncte ale planului E^2, cărora le aplicăm transformarea T_2T_1. Imaginile lor prin compunerea izometriilor T_2T_1 vor fi A_1', respectiv, B_1', iar distanța dintre A și B va fi $d(A, B)$. Deoarece T_1 este o izometrie avem

$$d(A_1, B_1) = d(T_1(A), T_1(B)) = d(A, B).$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, T_2 fiind o izometrie, avem

$$d(A_1', B_1') = d(T_2(A_1), T_2(B_1)) = d(A_1, B_1).$$

Cum $A_1 = T_1(A)$, $B_1 = T_1(B)$ și $d(A_1, B_1) = d(A, B)$ rezultă

$$d(T_2T_1(A), T_2T_1(B)) = d(A, B),$$

adică compunerea a două izometrii T_2T_1 conservă distanța și deci este o izometrie.

b) Compunerea izometriilor este asociativă.

Într-adevăr, fiind date T_1, T_2, $T_3 \in \mathscr{T}$, izometrii ale planului euclidian pe el însuși, pentru orice $A \in E^2$ avem:

$$(T_3(T_2T_1))(A) = T_3((T_2T_1)(A)) =$$

$$= T_3(T_2(T_1(A))) = (T_3T_2)(T_1(A)) = ((T_3T_2)T_1)(A).$$

c) În mulțimea izometriilor $\mathscr{T}$ există o izometrie T care face ca oricărui punct P al planului să-i corespundă el însuși, adică $P = T(P)$. Numim această izometrie *transformarea identică*. O vom nota cu T_0. Ea satisface egalitatea

$$T_0T_1 = T_1T_0 = T_1, \qquad \forall\, T_1 \in \mathscr{T}.$$

d) Orice izometrie $T \in \mathscr{T}$ a planului E^2 fiind bijectivă admite o inversă T^{-1}, care este de asemenea o izometrie.

Fie $T: E^2 \to E^2$ o izometrie a planului E^2 și fie A, B două puncte oarecare din planul E^2. Dacă notăm $A' = T^{-1}(A)$, $B' = T^{-1}(B)$ vom avea $A = T(A')$ și $B = T(B')$. Deoarece T este o izometrie rezultă că $d(A, B) = d(A', B')$, deci și T^{-1} este o izometrie.

Mulțimea izometriilor planului fiind înzestrată cu proprietățile a) — d) ea are o structură de grup, ceea ce trebuia arătat.

4. Fie $T: E^2 \to E^2$ o izometrie. Să se demonstreze că punctele unui cerc $\mathscr{C}$ sînt aplicate de T în punctele cercului $\mathscr{C}'$ congruent cu $\mathscr{C}$.

Soluție. Fie cercul $\mathscr{C}$ de centru O și rază r. Prin izometria T avem $O' = T(O)$ care este centrul cercului $\mathscr{C}'$ a cărui rază este tot r. Pentru orice punct M aparținînd cercului $\mathscr{C}$ există $T(M) = M'$ și vom avea:

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |OM| = r \Leftrightarrow |O'M'| = r \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}',$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

5. Dacă T este o izometrie iar d_1 și d_2 două drepte concurente în A, atunci $T(d_1) \cap T(d_2) = \{A'\}$, unde $A' = T(A)$.

Soluție. Fie dreptele d_1 și d_2 din planul E^3, iar $d_1' = T(d_1)$ și $d_2' = T(d_2)$ imaginile lor prin izometria T. Deoarece izometria transformă o dreaptă într-o dreaptă (vezi proprietatea 2), atunci punctului $A \in d_1$ îi corespunde punctul $A' = T(A) \in d_1'$; aceluiași punct $A \in d_2$ îi corespunde punctul $A'' = T(A) \in d_2'$. Rezultă că $d(A, A) = d(A', A'')$. Deoarece $d(A, A) = 0$, atunci și $d(A', A'') = 0$, adică $A' = A''$. Deci $T(d_1) \cap T(d_2) = \{A'\}$.

6. Dacă T este o izometrie și d o dreaptă perpendiculară pe planul π, atunci $T(d) \perp T(\pi)$.

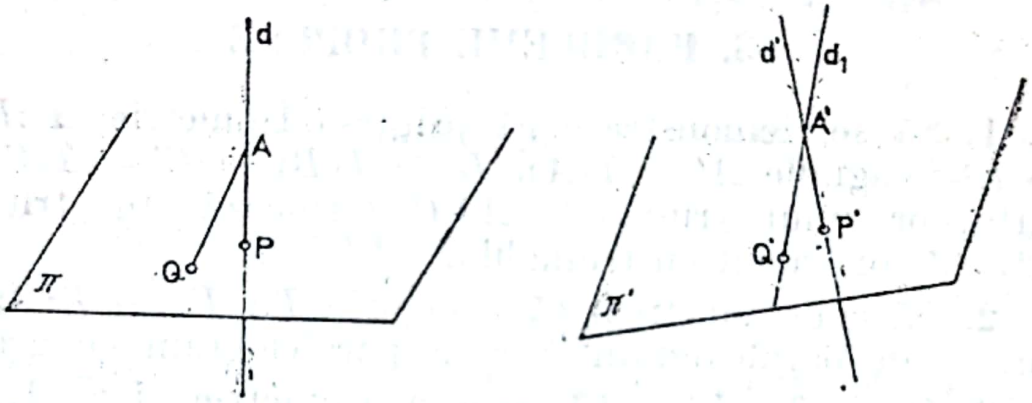


Fig. I.1

Soluție. Fie $d' = T(d)$ și $\pi' = T(\pi)$, transformatele dreptei și, respectiv, planului prin izometria T, și fie $\{P\} = d \cap \pi$ (vezi fig. I.1). Corespondentul punctului P este punctul $\{P'\} = d' \cap \pi'$.

Fie punctul $A \in d$ și $A' = T(A)$ transformatul lui A. Presupunem că d' nu este perpendiculară pe π'. Atunci fie d_1 perpendiculara din A' pe planul π' și $\{Q'\} = d_1 \cap \pi'$, Q' fiind transformatul punctului Q, punct ce aparține planului π. Avem $d(A, P) = d(A', P')$ și $d(A, Q) = d(A', Q')$. Deoarece punctul P este proiecția ortogonală a punctului A pe planul π are loc relația $d(A, P) < d(A, Q)$ și deci

$$d(A', P') < d(A', Q'). \tag{1}$$

Deoarece am presupus $d_1 \perp \pi'$, rezultă că Q' ar fi proiecția ortogonală a punctului A' pe planul π' și atunci

$$d(A', Q') < d(A', P'). \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că P' coincide cu Q', iar d_1 coincide cu d'. Atunci perpendiculara este d'.

7. Să se demonstreze că izometria T transformă două plane paralele tot în două plane paralele.

Soluţie. Fie planele $\pi_1 \parallel \pi_2$, adică $\pi_1 \cap \pi_2 = \{\emptyset\}$. Vom arăta că şi $\pi_1' \cap \pi_2' = \{\emptyset\}$, unde $\pi_1' = T(\pi_1)$ iar $\pi_2' = T(\pi_2)$. Presupunem contrariul, adică $\pi_1' \cap \pi_2' = \{d'\}$, şi să notăm cu A' un punct oarecare de pe dreapta d', dreapta de incidenţă a celor două plane. Fie A_1 şi A_2 două puncte ce aparţin planelor π_1, respectiv, π_2. Atunci $A' = T(A_1)$, $A_1 \in \pi_1$ şi $A' = T(A_2)$, $A_2 \in \pi_2$. Dar T fiind o izometrie avem $d(A', A') = d(A_1, A_2) = 0$, de unde rezultă că $A_1 = A_2$, deci planele π_1 şi π_2 nu ar fi paralele.

3. PROBLEME PROPUSE

1. Să se demonstreze că printr-o izometrie $T : E^2 \to E^2$ imaginile $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ şi $C' = T(C)$ ale vîrfurilor unui triunghi ABC formează un triunghi $A'B'C'$ congruent cu triunghiul ABC.

2. Să se demonstreze că izometria $T : E^2 \to E^2$ transformă un paralelogram într-un paralelogram congruent.

3. Dacă $T : E^2 \to E^2$ este o izometrie, iar A, B, C trei puncte necoliniare ce aparţin planului E^2, atunci $\sphericalangle(T(A)T(B)T(C)) \equiv \sphericalangle(ABC)$.

4. Fie $T : E^2 \to E^2$ o izometrie, iar $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ şi $C' = T(C)$ imaginile prin izometria T a trei puncte necoliniare A, B, C care aparţin planului E^2. Să se arate că un punct interior ce aparţine triunghiului ABC corespunde unui punct interior ce aparţine triunghiului $A'B'C'$.

5. Să se demonstreze că izometria $T : E^2 \to E^2$ transformă un poligon regulat (P) într-un poligon (P') congruent cu (P).

6. Să se demonstreze că printr-o izometrie $T : E^2 \to E^2$ punctele unui semiplan au imaginile într-un semiplan.

7. Fie $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ o izometrie între spaţiile metrice $(\mathcal{M}, d)$ şi $(\mathcal{M}', d')$ iar A, B, C puncte din $\mathcal{M}$. Să se demonstreze că B se află între A şi C dacă $T(B)$ se află între $T(A)$ şi $T(C)$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Fie T o izometrie, să se demonstreze că pentru orice plan π există un plan π' astfel încît dacă un punct $X \in \pi$, atunci $T(X) \in \pi'$.

9. Să se arate cîte izometrii transformă un triunghi echilateral în el însuși.

10. Fie $T : E^3 \to E^3$ o izometrie, A, B, C, D puncte necoplanare din E^3, iar A', B', C', D' imaginile lor prin izometria T. Să se arate că punctele A, B, C, D și A', B', C', D' determină transformarea T.

11. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte perpendiculare în două drepte perpendiculare.

12. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unui plan este un plan paralel.

13. Să se arate că orice izometrie T transformă două plane perpendiculare în două plane perpendiculare.

Soluții. Indicații

1. Se aplică cazul III de congruență a triunghiurilor și se ține seama de teorema 1.3.

2. În orice paralelogram diagonalele se taie în părți congruente. Punctul de intersecție al diagonalelor împreună cu vîrfurile paralelogramului, ce aparțin, respectiv, fiecărei diagonale, formează trei puncte coliniare. Se aplică proprietatea 1 a izometriilor.

3. Cele trei puncte necoliniare date formează un triunghi. Se ține seama de proprietatea 5 a izometriilor și se aplică cazul III de congruență a triunghiurilor.

4. Se ține seama de soluția problemei 1.

5. Se descompune poligonul în triunghiuri ducînd diagonalele etc.

6. Considerăm dreapta XY ce delimitează planul E^2 în semiplanele S și R, un punct O aparținînd dreptei XY și semidreapta $|OZ$ ce aparține semiplanului S și-l împarte pe acesta în trei submulțimi de puncte, și anume:

$\{S_1\}$ = mulțimea punctelor interioare unghiului $\widehat{XOY}$;

$\{S_2\}$ = mulțimea punctelor interioare unghiului $\widehat{YOZ}$;

Scanned with OKEN Scanner

$\{S_3\}$ = mulțimea punctelor ce aparțin semidreptei $|OZ$.

Izometria T transformă punctele fiecăreia din mulțimile $\{S_1\}$, $\{S_2\}$, $\{S_3\}$ respectiv în puncte ale mulțimilor :

$\{S_1'\}$ = mulțimea punctelor interioare unghiului $\widehat{X'O'Z'}$;

$\{S_2'\}$ = mulțimea punctelor interioare unghiului $\widehat{Y'O'Z'}$;

$\{S_3'\}$ = mulțimea punctelor semidreptei $|O'Z'$.

Mulțimile de puncte $\{S_1'\}$, $\{S_2'\}$, $\{S_3'\}$ sînt imagini, respectiv, ale mulțimilor de puncte $\{S_1\}$, $\{S_2\}$, $\{S_3\}$ prin transformarea T. Observăm că mulțimile $\{S_1'\}$, $\{S_2'\}$, $\{S_3'\}$ sînt mulțimi ale aceluiași semiplan din planul $\pi' = T(\pi)$, semiplan determinat de dreapta $X'Y' = T(XY)$ și semidreapta $|O'Z' = T(|OZ)$.

7. Fie B între A și C, adică

$$d(A, B) + d(B,C) = d(A, C).$$

Deoarece T este o izometrie, rezultă că

$$d'(T(A), T(B)) + d'(T(B), T(C)) = d'(T(A),T(C)).$$

Deci $T(B)$ se află între $T(A)$ și $T(C)$. Reciproc, se demonstrează în mod identic folosind izometria T^{-1}.

8. Fie A, B și C puncte necoliniare aparținînd planului π, care vor determina în mod evident un triunghi, și punctele $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ imaginile lor prin T. Punctele A', B', C' vor determina un plan π'. Considerăm punctul arbitrar $X \in \pi$. Dreapta ce unește unul din vîrfurile triunghiului ABC cu punctul X va intersecta una din laturile triunghiului într-un punct. Fie $|AX| \cap |BC| = \{M\}$. Prin izometria T avem $X' = T(X)$ și $M' = T(M)$. Rezultă că $M' \in |B'C'|$, deci $M' \in \pi'$. Dar și X' va aparține în mod obligatoriu dreptei $A'M'$ care este conținută tot în planul π'. Rezultă că dacă $X' = T(X)$ atunci $T(X) \in \pi'$.

9. Deoarece $\Delta ABC \equiv \Delta ABC$ rezultă că $T : (\Delta ABC) \to (\Delta ABC)$ este o izometrie. Există următoarele izometrii :

$$T : (\Delta ABC) \to (\Delta ABC); \quad T : (\Delta ABC) \to (\Delta ACB);$$

$$T : (\Delta ABC) \to (\Delta BAC); \quad T : (\Delta ABC) \to (\Delta BCA);$$

Scanned with OKEN Scanner

$$T : (\Delta ABC) \to (\Delta CAB)\,;\; T : (\Delta ABC) \to (\Delta CBA)\,;$$

deoarece $\Delta ABC \equiv \Delta ACB \equiv \Delta BAC \equiv \Delta BCA \equiv$
$\equiv \Delta CAB \equiv \Delta CBA.$

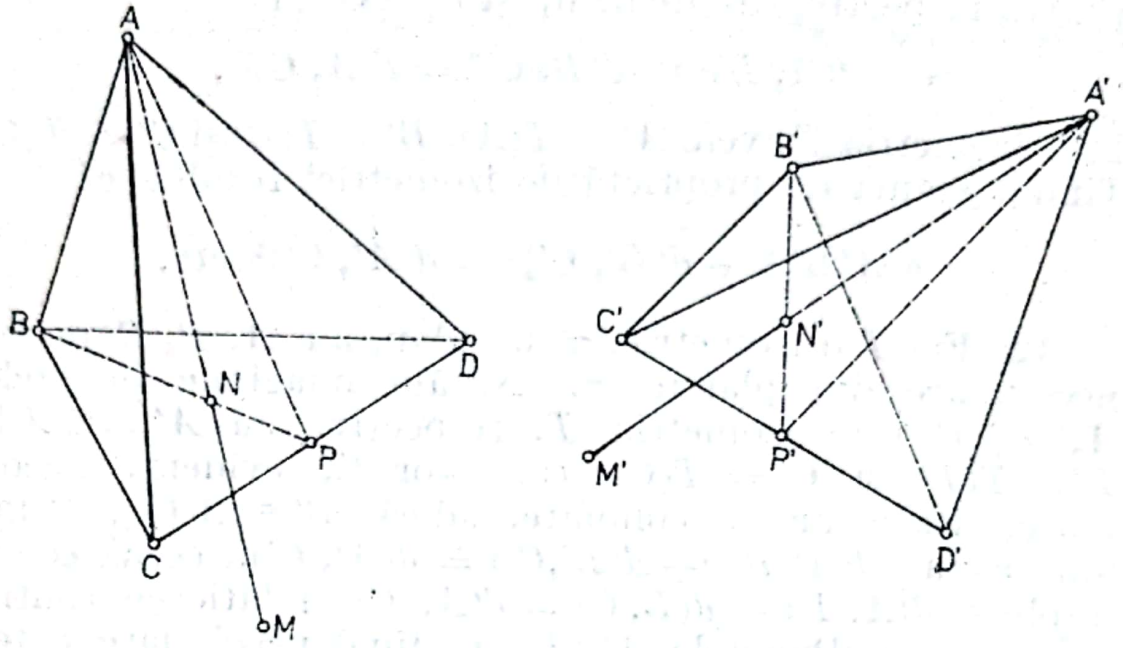


Fig. I.2

10. Considerăm punctele coplanare B, C și D care împreună cu punctul A determină tetraedrul $ABCD$. Fie M un punct arbitrar diferit de A, B, C, D astfel încît $|AM| \cap (BCD) = \{N\}$. Fie $\{P\} = |BN| \cap |CD|$, $(P \in |CD|)$. Conform ipotezei, deducem că pe segmentul $|C'D'|$ există un punct P' iar din $|CD| \equiv |C'D'|$ va rezulta că $|CP| \equiv |C'P'|$ și $|PD| \equiv |P'D'|$ (vezi fig. I.2). De asemenea, pe segmentul $|B'P'|$ există un punct N', astfel încît avem $|BN| \equiv |B'N'|$ și $|NP| \equiv |N'P'|$. Punctele P și P' fiind puncte omoloage în triunghiurile BCD și $B'C'D'$, rezultă că $|BP| \equiv |B'P'|$.

Considerăm acum triunghiurile congruente ACD și $A'C'D'$ în care P și P' sînt omoloage, deci $|AP| \equiv |A'P'|$. De aici rezultă că $\Delta ABP \equiv \Delta A'B'P'$ (L.L.L.), în care $|AN| \equiv |A'N'|$ deoarece N și N' sînt puncte omoloage.

Fie punctul $M' \in |A'N'|$ astfel încît să îndeplinească condițiile

$$|A'M'| \equiv |AM| \text{ și } |N'M'| \equiv |NM|.$$

Rezultă că M' este unicul punct (ținînd cont de datele problemei și de considerentele stabilite) care îndeplinește

Scanned with OKEN Scanner

condiţia $T(M) = M'$, şi deci cele opt puncte date determină transformarea T.

11. Fie T o izometrie şi dreptele $d_1 \perp d_2$. Notăm $d_1 \cap d_2 = \{B\}$ şi fie $A \neq B$ şi $C \neq B$ puncte aparţinînd, respectiv, dreptelor d_1 şi d_2. Avem

$$d(A, B)^2 + d(B, C)^2 = d(A, C)^2 .$$

Prin izometria T avem $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ şi $C' = T(C)$. Ţinînd seama de proprietăţile izometriei rezultă că

$$d(A'B')^2 + d(B', C')^2 = d(A', C')^2 \text{ etc.}$$

12. Fie T o izometrie, π un plan, iar A, B, C puncte necoliniare din planul π. Notăm imaginile punctelor A, B, C prin izometria T, respectiv, cu $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ şi $C' = T(C)$, care vor fi, evident, necoliniare. Dacă ar fi coliniare, adică $B' \in |A'C'|$, atunci am avea $d(A',B') + d(B',C') = d(A', C')$, ceea ce ar implica $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, relaţie ce contrazice ipoteza. Punctele A', B', C' fiind necoliniare determină un plan π'. Pentru rezolvarea problemei trebuie să arătăm că $\pi' = T(\pi)$. Aceasta se reduce la a arăta că $T(\pi) \subset \pi'$ şi $\pi' \subset T(\pi)$.

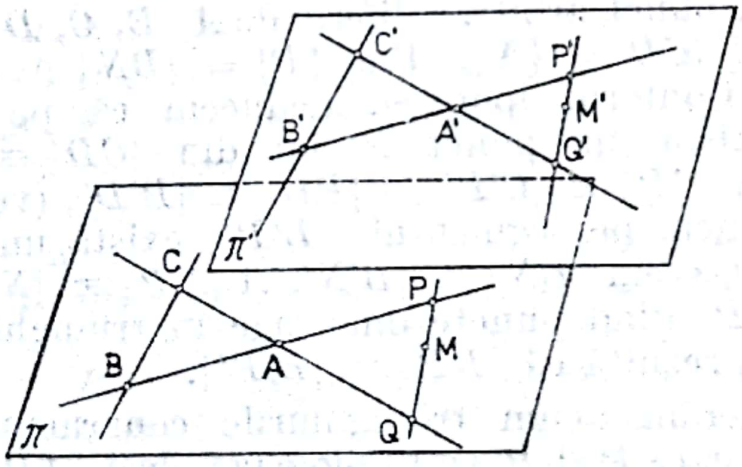


Fig. I.3

Considerăm un punct $M \in \pi$, prin care ducem o dreaptă d care să intersecteze oricare două dintre dreptele AB, BC, AC în două puncte distincte. Fie aceste puncte $P \in AB$ şi $Q \in AC$. Imaginile prin izometria T a acestor puncte vor fi $P' \in A'B'$, $Q' \in A'C'$ şi $M' \in P'Q'$. Deoarece $A'B' \subset \pi'$ şi $A'C' \subset \pi'$ iar $P' \neq Q'$ rezultă că $P' \in \pi'$ şi

$Q' \in \pi'$. Deoarece $M' \in P'Q'$ rezultă că $M' \in \pi'$ și deci avem $T(\pi) \subset \pi'$. Ținînd seama de proprietățile izometriei se arată ușor că și $\pi' \subset T(\pi)$, ceea ce încheie demonstrația (vezi fig. I.3).

13. Considerăm planele $\pi_1 \perp \pi_2$ și transformatele lor $T(\pi_1) = \pi_1'$ și $T(\pi_2) = \pi_2'$ prin izometria T. Vom arăta

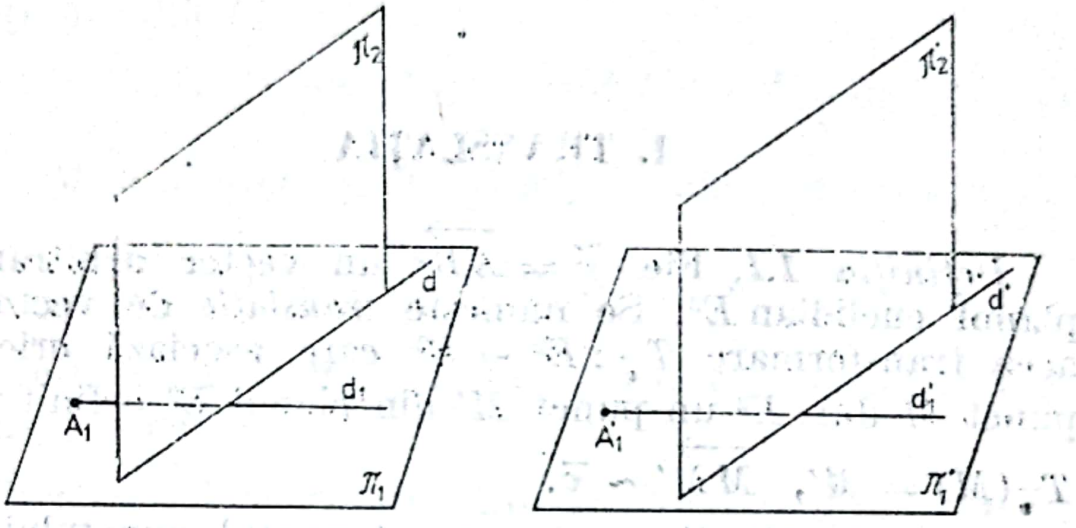


Fig. I.4

că $\pi_1' \perp \pi_2'$. Fie dreapta $d_1 \subset \pi_1$ și perpendiculară pe dreapta $d = \pi_1 \cap \pi_2$. Rezultă că $d_1 \perp \pi_2$. Fie A_1 un punct ce aparține dreptei d_1, ceea ce implică $A_1 \subset \pi_1$. Rezultă că prin izometria T, punctul $A_1' = T(A_1)$ se află în planul $\pi_1' = T(\pi_1)$. Transformata dreptei d_1, adică $d_1' = T(d_1)$ este perpendiculară pe planul $\pi_2' = T(\pi_2)$. Din $d_1 \subset \pi_1$ rezultă că $d_1' \subset \pi_1'$ (vezi fig. I.4). Deoarece dreapta d_1' este conținută în planul π_1' și este perpendiculară pe planul π_2', rezultă că planul π_1' este perpendicular pe planul π_2', ceea ce încheie demonstrația.

Scanned with OKEN Scanner

1. TRANSLAȚIA

Definiția 1.1. Fie $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$* un vector arbitrar în planul euclidian E^2. Se numește *translație* de vector $\vec{v}$ acea transformare $T_{\vec{v}} : E^2 \to E^2$ care asociază oricărui punct M din E^2 un punct M' din planul E^2 definit prin $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $\overrightarrow{MM'} \sim \vec{v}$.

Punctul M' îl numim transformatul punctului M prin translația $T_{\vec{v}}$ și vom folosi notația $T_{\vec{v}}(M) = M'$. Vom spune că o translație este bine definită dacă se dau un punct A și imaginea sa B prin această translație. În cazul particular $A = B$ este evident că translația $T_{\vec{v}}$ este translație de vector nul ($\vec{v} = \vec{0}$). Ea este aplicația identică a planului E^2; o notăm cu $T_{\vec{0}}$.

Teorema 1.1. *Dacă $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sînt vectori echipolenți ce aparțin planului E^2 iar T și T' sînt translațiile de vector $\vec{v}$, respectiv, $\vec{v}'$, atunci $T = T'$.*

Demonstrație. Fie un punct $M \in E^2$ și fie $M' = T(M)$ și $M'' = T'(M)$. Este evident că avem

$$\overrightarrow{MM'} \sim \vec{v} \sim \vec{v}' \sim \overrightarrow{MM''},$$

deci $\overrightarrow{MM'} \sim \overrightarrow{MM''}$, de unde rezultă $M' = M''$. Această relație fiind adevărată pentru orice punct $M \in E^2$ rezultă că $T = T'$; ceea ce trebuia demonstrat.

---

* Numim vector, o pereche ordonată de puncte (A, B); punctul A se numește originea, iar punctul B extremitatea vectorului; se notează $\overrightarrow{AB}$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.2. *Orice translație este o izometrie.*

Demonstrație. Fie $T_{\vec{v}}$ o translație, $\vec{v} \in E^2$, M, N puncte distincte ale planului E^2 iar $M' = T(M)$ și $N' = T(N)$ imaginile punctelor M, respectiv, N prin translația $T_{\vec{v}}$. Figura $MNM'N'$ este un paralelogram deoarece $\overrightarrow{MM'} \sim \overrightarrow{NN'}$. Atunci avem și $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{M'N'}$. Din aceste relații rezultă că

$$d(M, N) = d(M', N') = d(T(M), T(N)). \tag{1}$$

Dacă $M = N$ avem și $M' = N'$, de unde se deduce

$$d(M, N) = d(M', N') = 0. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $T_{\vec{v}}$ este o izometrie, ceea ce trebuia demonstrat.

Observație. Proprietățile izometriilor enunțate la p. 12 se aplică deopotrivă și pentru translații.

Teorema 1.3. *Transformarea compusă $T_2 \circ T_1$ a translațiilor T_1 și T_2, de vectori $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ din planul π, este translația de vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.*

Demonstrație. Fie T_1 și T_2 două translații ale planului π în el însuși, de vectori, respectiv, $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ și M un punct din plan. Fie M' transformatul lui M prin T_1 și fie M'' transformatul lui M' prin T_2; M'' este de asemenea transformatul lui M prin $T_2 \circ T_1$ (vezi fig. II.1 și mai departe problema 3 de la p. 15). Avem

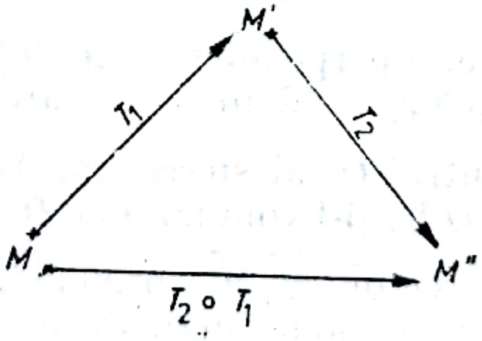


Fig. II.1

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}_1 \text{ și } \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}_2,$$

ceea ce implică $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. De unde rezultă că $T_2 \circ T_1$ este translația de vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Teorema 1.4. *Orice translație $T_{\vec{v}}$ de vector nenul $\vec{v}$ nu are puncte fixe, invariază dreptele paralele cu $\vec{v}$ și planele paralele cu $\vec{v}$.*

Observație. Definițiile, teoremele și considerațiile referitoare la translații sînt valabile deopotrivă în plan cît și în spațiul euclidian tridimensional.

Rezolvarea problemelor prin metoda translației constă în faptul că deplasăm cu ajutorul translației o parte a figurii cu scopul de a apropia unele elemente care sînt distanțate și îngreuiază rezolvarea problemei. După ce ne-am folosit de translație și am construit noua figură (ce corespunde datelor problemei), revenim la poziția inițială și construim figura căutată în care raționăm conform datelor problemei și concluziilor din figura translatată.

Exemplu. Fie sferele $\mathscr{S}(O, r)$ și $\mathscr{S}_1(O_1, r_1)$ și un plan π. Să se ducă un plan Q paralel cu π astfel ca intersecția lui cu cele două sfere să fie două cercuri congruente.

Soluție. Presupunem problema rezolvată și construim figura. Deoarece cercurile obținute prin intersecția planului Q cu cele două sfere trebuie să fie congruente, observăm că ele se pot obține unul din celălalt printr-o mișcare de translație dată uneia din sfere.

Construcție. Ducem perpendicularele OM și O_1M_1 pe planul π. Sferei $\mathscr{S}_1(O_1r_1)$ îi dăm o mișcare de translație de vector $\overrightarrow{M_1M}$. Centrul O_1 al sferei translatate va aparține perpendicularei OM, și-l vom nota cu O_2 (vezi fig.II.2). Prin translația de vector $\overrightarrow{M_1M}$ obținem o nouă figură în care sfera $\mathscr{S}(O, r)$ și noua sferă de centru O_2 se vor intersecta după un cerc $\mathscr{C}$ cu centrul în $O_3 \in OM$. Emitem judecățile în noua figură. Construim planul Q astfel încît să coincidă cu planul cercului $\mathscr{C}$. Readucem sfera $\mathscr{S}_1$ (prin translația de vector $\vec{v} = -\overrightarrow{M_1M}$) în poziția inițială și reținem noua figură.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Intersecția sferelor de centru O_1, respectiv, O_2 este cercul $\mathscr{C}$, cu centrul în $O_3 \in OM$ al cărui plan este perpendicular pe linia centrelor care se află pe dreapta OM, perpendiculară pe planul π. Rezultă că planul cercului $\mathscr{C}$ este paralel cu planul π. Dar planul cercului $\mathscr{C}$ coincide cu planul Q. Deci $Q \parallel \pi$. Problema admite soluție cînd sferele $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}$ se pot aduce în poziția în care se intersectează.

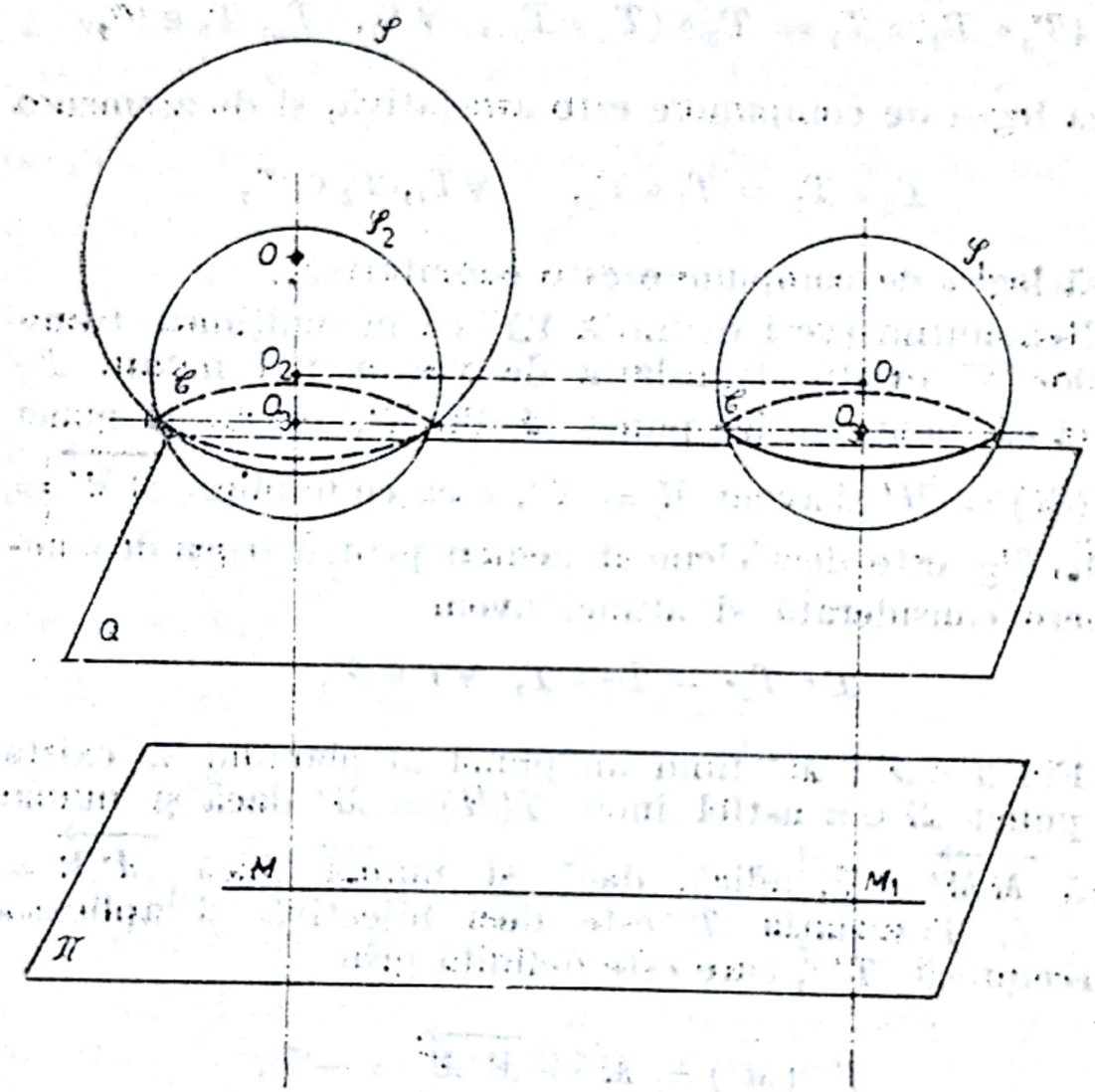


Fig. II.2

2. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se demonstreze că mulțimea translațiilor unui plan formează grup în raport cu operația de compunere.

Soluție. Notăm cu $\mathscr{T}$ mulțimea transalațiilor planului E^2 în el însuși, și fie T_0, T_1, T_2, T_3... elemente

ale mulțimii $\mathscr{T}$. Aplicația compusă $T_2 \circ T_1$ a două translații T_1, T_2 fiind o translație (vezi teorema 1.3) rezultă că, compunerea lor este o lege de compoziție internă definită pe mulțimea translațiilor.

Deoarece am arătat că $T_2 \circ T_1$ este translația de vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, din proprietatea de asociativitate și cea de comutativitate a sumei vectorilor rezultă că

$$(T_3 \circ T_2) \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1), \quad \forall T_1, \ T_2, \ T_3 \in \mathscr{T},$$

adică legea de compunere este asociativă, și de asemenea

$$T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2, \qquad \forall T_1, T_2 \in \mathscr{T},$$

adică legea de compunere este comutativă.

Reamintim (vezi definiția 1.1) că în mulțimea translațiilor $\mathscr{T}$ există translația de vector nul notată $T_{\vec{0}}$ astfel că, pentru orice punct M din E^2, există un punct $T_{\vec{0}}(M) = M'$ și avem $M = M'$, ceea ce implică $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$. $T_{\vec{0}}$ este deci element neutru pentru legea de compunere considerată și atunci avem

$$T \circ T_{\vec{0}} = T_{\vec{0}} \circ T, \quad \forall T \in \mathscr{T}.$$

Fie $T \in \mathscr{T}$; M' fiind un punct al planului π există un punct $M \in \pi$ astfel încît $T(M) = M'$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, adică, dacă și numai dacă $\overrightarrow{M'M} = -\vec{v}$. Translația T este deci bijectivă și aplicația sa reciprocă T^{-1}, care este definită prin

$$T^{-1}(M') = M \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{v},$$

este translația de vector $-\vec{v}$. Aceasta ne permite să afirmăm că

$$\forall T \in \mathscr{T}, \exists T^{-1} \in \mathscr{T} \text{ și } T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = T_{\vec{0}}, \ T_{\vec{0}} \in \mathscr{T},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

2. Se consideră un segment $|AB|$ de lungime l. Să se găsească mulțimea M a punctelor din plan astfel încît mediana dusă din vîrful A al triunghiului AMB să fie

Scanned with OKEN Scanner

congruentă cu înălțimea corespunzătoare vîrfului B al triunghiului.

Soluție. Fie M punctul care satisface condițiile din enunțul problemei. Notăm cu $|AO|$ mediana triunghiului AMB, pe care o prelungim pînă în punctul N astfel ca $|AO| \equiv |ON|$. Patrulaterul $AMNB$ este paralelogram. Construim înălțimea $|BH|$ în triunghiul dat, iar din vîrful A construim perpendiculara $|AQ|$ pe $|BN|$. Avem $|AQ| \equiv |BH| \equiv |AO|$. Rezultă că triunghiul AQN este dreptunghic și măs $(\widehat{ANQ}) = 30°$. Dacă M este punctul căutat, atunci segmentul $|AB|$ se vede din punctul N sub un unghi a cărui măsură este de 30°. Este evident că mulțimea punctelor N se găsește pe două cercuri $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ în care segmentul $|AB|$ este coardă și taie cercurile în arce de măsură egale cu 60°. Rezultă că mulțimea punctelor M se va găsi pe cercurile $\mathscr{C}_1'$ și $\mathscr{C}_2'$ obținute aplicînd cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ translația de vector $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Se va arăta în continuare că orice punct al cercurilor $\mathscr{C}_1'$ și $\mathscr{C}_2'$ aparține mulțimii de puncte căutate și demonstrația se încheie.

3. Să se construiască un trapez cunoscînd diagonalele, linia mijlocie și unul din unghiurile alăturate bazei mari.

Soluție. Presupunem problema rezolvată și fie trapezul $ABCD$ avînd baza mică $|AD|$ și baza mare $|BC|$. Dăm diagonalei $|AC|$ o mișcare de translație de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ și obținem triunghiul $BC'D$ pe care îl putem construi. Găsim astfel vîrfurile B și D ale trapezului căutat. Pentru a găsi vîrful A ducem prin D o paralelă la $|BC'|$ (observăm că $|BC'|$ este dublul liniei mijlocii) și construim apoi în punctul B unghiul dat. O paralelă prin punctul A la $|DC'|$ determină vîrful C al trapezului căutat (vezi fig. II.3).

4. Să se arate că orice translație de vector $\vec{v}$ transformă un unghi într-un unghi congruent.

Soluție. Fie $T_{\vec{v}}$ translația de vector $\vec{v}$ și $\widehat{dd_1}$ unghiul format de semidreptele d și d_1. Translația fiind o izometrie,

duce pe d în $d' = T_{\vec{v}}(d)$ și pe d_1 în $d_1' = T_{\vec{v}}(d_1)$, de unde va rezulta că $d \| d'$ și $d_1 \| d_1'$, adică unghiurile $\widehat{dd_1}$ și $\widehat{d'd_1'}$ sînt unghiuri cu laturile, respectiv, paralele, deci sînt congruente.

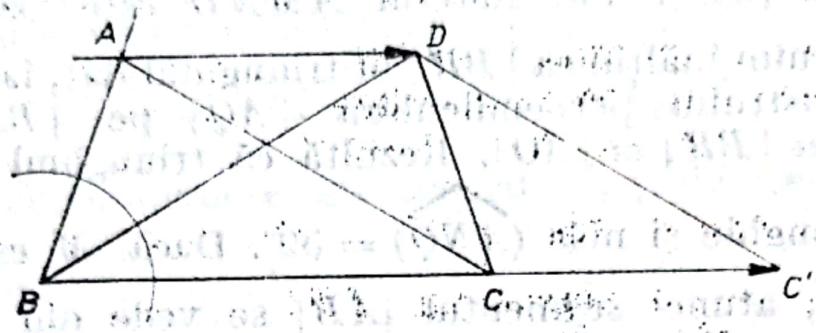


Fig. II.3

5. Să se arate că transformatele punctelor planului π printr-o translație de vector $\vec{v}$ aparțin unui plan π' paralel cu planul π.

Soluție. Fie $T_{\vec{v}}$ translația de vector $\vec{v}$, A, B, C puncte necoliniare din planul π și $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{CC'} \sim \vec{v}$, unde $A' = T_{\vec{v}}(A)$, $B' = T_{\vec{v}}(B)$ și $C' = T_{\vec{v}}(C)$. Punctele A', B' și C' fiind imaginile punctelor A, B, respectiv, C prin translația $T_{\vec{v}}$, avem că $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$ și $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, de unde rezultă că $|AC| \| |A'C'|$, $|AB| \| |A'B'|$. Dar $A'B'$ și $A'C'$ determină un plan π' care în mod evident este paralel cu planul π.

6. Să se arate că translația plană de vector $\vec{v}$ transformă un cerc din planul π într-un cerc congruent din același plan.

Soluție. Fie $T_{\vec{v}}$ translația de vector $\vec{v}$, cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și un punct $M \in \mathscr{C}$, iar $O' = T_{\vec{v}}(O)$ și $M' = T_{\vec{v}}(M)$ imaginile punctelor O, respectiv, M prin translația $T_{\vec{v}}$. Deoarece $\overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{MM'} \sim \vec{v}$ rezultă că patrulaterul $OMO'M'$ este un paralelogram (vezi fig. II.4). Deci $d(O,M) = d(O',M') = r$. Rezultă că în timp ce punctul M parcurge cercul $\mathscr{C}(O, r)$ punctul M' parcurge un cerc $\mathscr{C}'(O', r)$ congruent cu cercul $\mathscr{C}(O,r)$.

7. Să se construiască un trapez cînd se cunosc laturile lui.

Soluție. Construim baza mare $|AB|$ a trapezului de lungime dată. Apoi ducem cercurile de centru A, respectiv, B și de rază $r_1 = |AD|$, respectiv, $r_2 = |BC|$ (de mărime dată, fiind laturi neparalele în trapez), pe

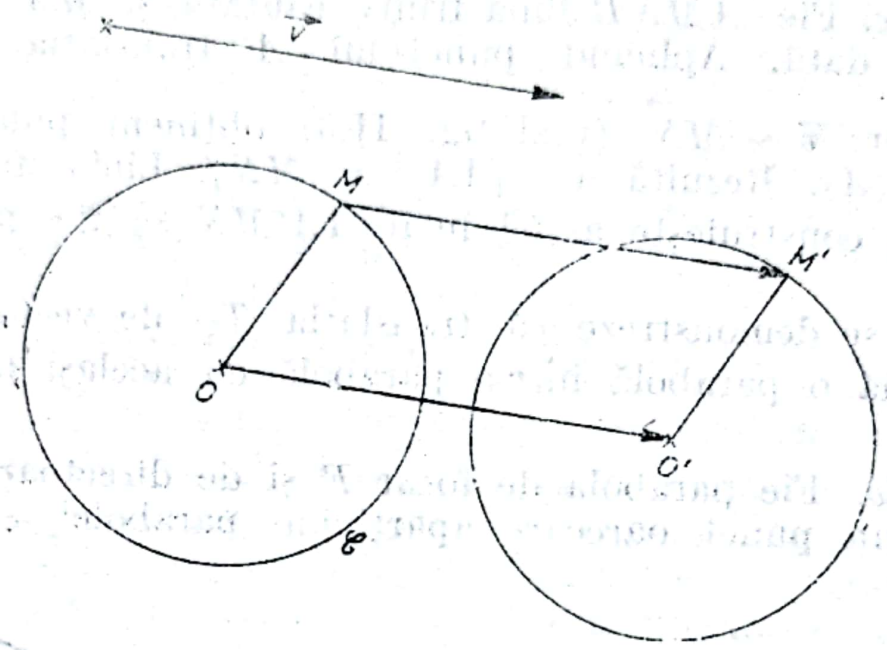


Fig. II.4

care se vor afla vîrfurile D și, respectiv, C ale trapezului (vezi fig. II.5). Baza mică $|CD|$, de lungime dată l, este paralelă cu $|AB|$ și are capetele pe cele două cercuri. Aplicînd unuia din cercuri translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} \sim \overrightarrow{CD}$ găsim intersecția cu cel de al doilea cerc.

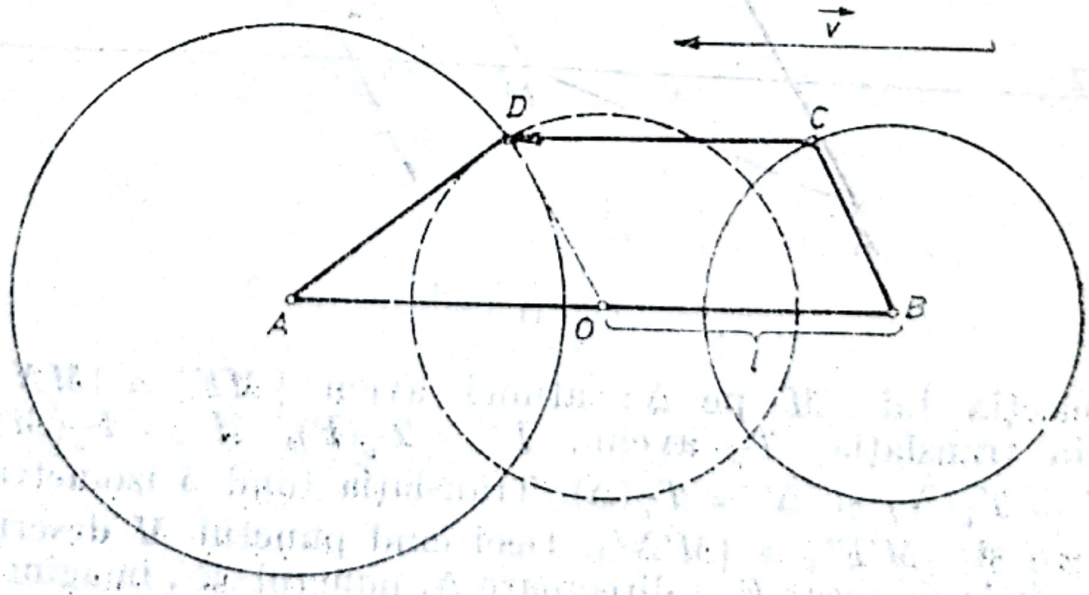


Fig. II.5

8. Se dau dreptele $d_1 \parallel d_2$ și punctele A, B exterioare celor două drepte, situate de o parte și de alta a lor. Să se determine linia frîntă cea mai scurtă care unește cele două puncte, astfel ca porțiunea cuprinsă între cele două paralele să aibă o direcție dată.

Soluție. Fie $AMNB$ linia frîntă căutată și $\overrightarrow{MN} \sim \vec{v}$ direcția dată. Aplicînd punctului A translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} \sim \overrightarrow{MN}$ (vezi fig. II.6) obținem punctul $A' = T_{\vec{v}}(A)$. Rezultă că $|AA'| \equiv |MN|$. Linia frîntă AMN se construiește astfel încît $AA'MN$ să fie paralelogram.

9. Să se demonstreze că translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$ transformă o parabolă într-o parabolă cu același parametru.

Soluție. Fie parabola de focar F și de directoare Δ. Fie M un punct oarecare aparținînd parabolei și N

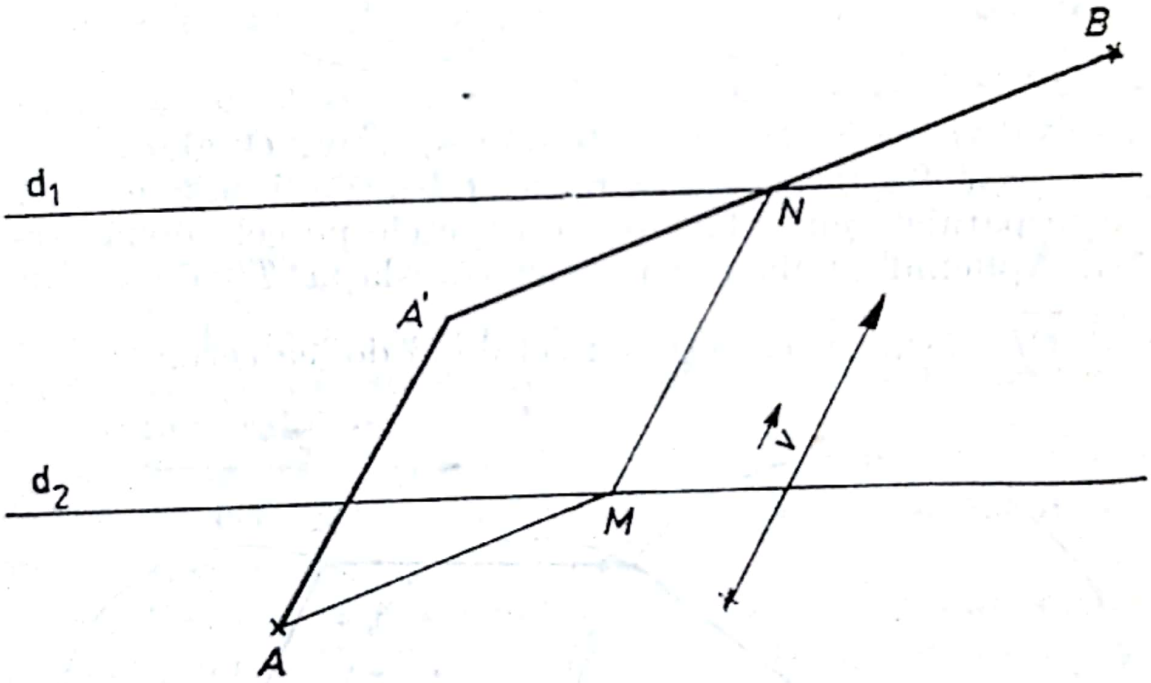


Fig. II.6

proiecția lui M pe Δ; atunci avem $|MF| \equiv |MN|$. Prin translația $T_{\vec{v}}$ avem: $F' = T_{\vec{v}}(F)$, $M' = T_{\vec{v}}(M)$, $N' = T_{\vec{v}}(N)$ și $\Delta' = T_{\vec{v}}(\Delta)$. Translația fiind o izometrie avem și $|M'F'| \equiv |M'N'|$. Deci cînd punctul M descrie parabola de focar F și directoare Δ, punctul M', imaginea

Scanned with OKEN Scanner

lui M prin translația $T_{\vec{v}}$, descrie parabola ce are ca focar $F' = T_{\vec{v}}(F)$ și ca directoare $\Delta' = T_{\vec{v}}(\Delta)$ cu același parametru.

10. Se dau în planul E^2 două perechi de drepte paralele $d_1 \parallel d_1'$ și $d_2 \parallel d_2'$. Să se arate în ce condiții există o translație $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} \in E^2$, care să transforme pe d_1 în d_1' și pe d_2 în d_2'.

Indicație. Dacă $d_1 \cap d_2 \neq \{O\}$ problema are soluție. Dacă $d_1 \parallel d_2$ există posibilitatea ca problema să nu aibă soluție (cînd vectorul $\vec{v}$ este paralele cu dreptele d_1 și d_2, atunci perechile de drepte paralele cu $\vec{v}$ sînt invarianți ai translației $T_{\vec{v}}$ (vezi teorema 1.4).

11. Fie $ABCD$ un patrulater convex din planul E^2, $T_{\vec{v}}$ translația de vector $\vec{v} \sim \overrightarrow{AC}$ și punctele $B' = T_{\vec{v}}(B)$ și $D' = T_{\vec{v}}(D)$. Să se arate că laturile paralelogramului $BB'D'D$ sînt congruente cu diagonalele patrulaterului dat și că un unghi format de două laturi ale paralelogramului este congruent cu unul din unghiurile formate de diagonalele patrulaterului dat (vezi fig. II.7).

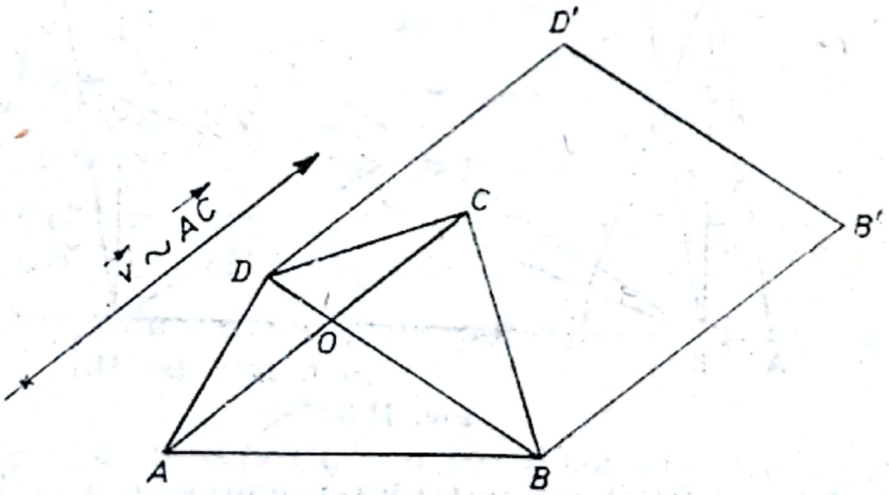


Fig. II.7

Soluție. Translația fiind o izometrie rezultă că $|BD| \equiv |B'D'|$. Din $B' = T_{\vec{v}}(B)$, $D' = T_{\vec{v}}(D)$ și $\vec{v} \sim \overrightarrow{AC}$ rezultă că $|AC| \equiv |BB'| \equiv |DD'|$. Din $|AC|$ paralel cu

Scanned with OKEN Scanner

$|DD'|$ și $|BD|$ paralel cu $|B'D'|$ rezultă că $\widehat{BOC} \equiv \widehat{BDD'}$ $(AC \cap BD = \{O\})$.

12. Fie $ABCD$ un paralelogram în care se duc înălțimile $|BK|$ și $|BH|$. Se dau segmentele $\|KH\| = a$ și $\|BD\| = b$. Să se afle distanța de la punctul B la punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului BKH.

Soluție. Construim $|DP| \perp |BC|$. Apoi, ducem cele trei înălțimi ale triunghiului BKH și fie E punctul lor de intersecție. Aplicăm triunghiului BKE translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{KD}$. Vom avea: $D = T_{\vec{v}}(K)$, $H = T_{\vec{v}}(E)$ și $P = T_{\vec{v}}(B)$. Deoarece translația este o izometrie, rezultă că triunghiurile BKE și PDH sînt congruente și au laturile omoloage paralele. Deci $|BE| \equiv |PH|$. Triunghiul KHP este dreptunghic, măs $(\widehat{KHP}) = 90°$, și deci $\|PH\| = \sqrt{|PK|^2 - |HK|^2}$ (vezi fig. II.8). Deoarece $|BD| \equiv |PK|$ avem $\|BE\| = \sqrt{b^2 - a^2}$.

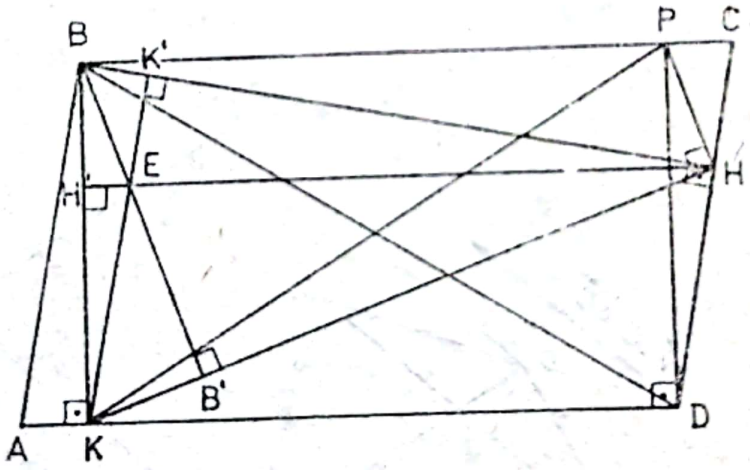


Fig. II.8

13. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\|AB\| = a$ și $\|CD\| = b$, avînd ca diagonale segmentele $|AC|$ și $|BD|$. Știind că prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$, $A' = T_{\vec{v}}(A)$, să se construiască:

a) Punctul D, cunoscînd poziția punctelor C, A' și lungimile a, b ale laturilor $|AB|$, respectiv, $|CD|$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Patrulaterul $ABCD$ știind că vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$ este de lungime și direcție date.

Soluție. a) Presupunem problema rezolvată (vezi fig. II.9). Din ipoteză $A' = T_{\vec{v}}(A)$. Punctele A, B, D, A' formează un paralelogram, cu $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BD} = \vec{v}$, și atunci $|AB| \equiv |A'D|$. Punctul D se află la intersecția cercurilor $\mathscr{C}(A', a)$ și $\mathscr{C}'(C, b)$.

b) Cunoscînd poziția punctelor A' și C și lungimile a și b ale laturilor $|AB|$, respectiv, $|CD|$ construim cercurile $\mathscr{C}(A', a)$ și $\mathscr{C}'(C, b)$ la intersecția cărora se află puntul D. Construcția patrulaterului $ABCD$ este astfel evidentă.

Discuție. Dacă $a + b = d(A', C)$ cercurile sînt tangente și problema are o singură soluție. Dacă $a + b > d(A', C)$ cercurile sînt secante și problema are două soluții.

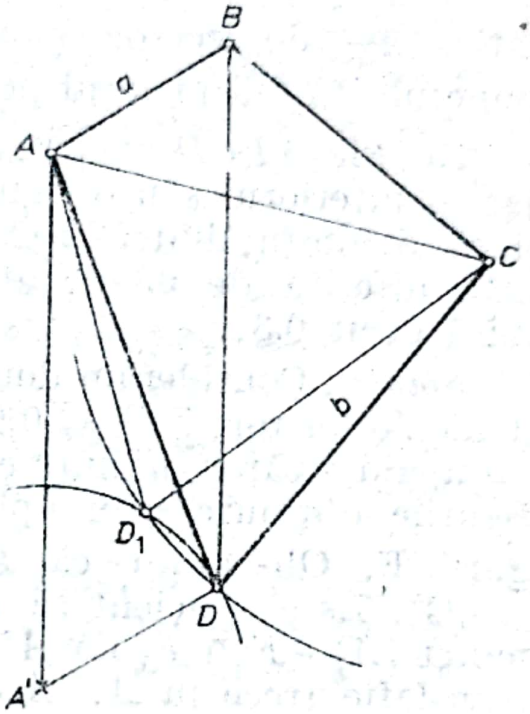


Fig. II.9

14. Fie ABC un triunghi oarecare. Perpendiculara în C pe latura $|BC|$ taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctul C'. Să se demonstreze că :

a) $|CC'| \equiv |AH|$, $(\{H\} = |CH| \cap |AB|$ și $|CH| \perp |AB|)$,

b) Cercurile ce trec prin punctele A, B, C, respectiv, H, B, C sînt congruente.

Soluție. a) măs $(\overset{\frown}{BCC'}) = 90°$ deoarece $|BC'|$ este diametrul cercului circumscris triunghiului ABC. Rezultă că și $|AC'| \perp |AB|$. Din $|CH| \perp |AB|$ și $|AC'| \perp |AB|$ rezultă că $AHCC'$ este dreptunghi, deci $|CC'| \equiv |AH|$.

b) Prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{CC'}$ avem : $C' = T_{\vec{v}}(C)$, $A = T_{\vec{v}}(H)$ și deci $T_{\vec{v}}$ duce cercul BCH în cercul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie $ABCD$ un paralelogram și segmentele $|BM| \perp |AD|$, $|BN| \perp |CD|$ și punctul H ortocentrul triunghiului BMN. Să se determine imaginea triunghiului BMH prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{MD}$. Discuție pentru unghiul B ascuțit și obtuz.

Indicație. Imaginea triunghiului BMH prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{MD}$ este triunghiul DNP, punctul P fiind piciorul perpendicularei din D pe $|BC|$.

16. Fie $ABCD$ un pătrat de latură egală cu unitatea, iar în interiorul său o figură oarecare F. Să se arate că dacă distanța dintre oricare două puncte ale figurii F este diferită de 0,001, atunci aria figurii F este mai mică decît 0,34.

Soluție. Considerăm două translații ale figurii F, amîndouă de vector $\|\vec{v}\| = 0{,}001$ și direcții ce fac între ele un unghi a căror măsură este de 60°. Notăm cu F_1 și F_2 figurile obținute prin aplicarea celor două translații figurii F. Observăm că $F \cap F_1 = F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F = \{\emptyset\}$. Este suficient să arătăm că $F \cap F_1 = \{\emptyset\}$. Fie un punct $\{A\} \in F \cap F_1$ iar A' punctul din F care prin prima translație trece în A. Atunci A și A' aparțin lui F și $\|AA'\| = 0{,}001$. Dacă vom construi pătratul $A'B'C'D'$ cu laturile la distanța de 0,001 de laturile pătratului $ABCD$ (în exteriorul acestuia) vom avea $S_F + S_{F_1} + S_{F_2} \leqslant S_{A'B'C'D'} < 1 + 0{,}005$. Rezultă că $S_F < \frac{1 + 0{,}005}{3} < 0{,}34$.

3. PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că singurele drepte transformate în ele însele de o translație $T_{\vec{v}}$ de vector nenul $\vec{v}$ sînt dreptele paralele cu vectorul $\vec{v}$ al translației.

2. Să se determine imaginile vîrfurilor unui hexagon regulat de centru O, prin translațiile: a) $T_{\vec{v}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$; b) $T_{\vec{v}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$; c) $T_{\vec{v}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

3. Fie A, B puncte distincte exterioare unei drepte d și de aceeași parte a ei (A, B și d sînt coplanare). Să se

Scanned with OKEN Scanner

găsească linia frîntă $AMNB$, de lungime minimă, știind că $|MN| \in d$ și are o lungime dată.

4. Fie $MNPQ$ un dreptunghi pe care se construiesc două fișii în care avem $|AA'| \equiv |BB'| \equiv |CC'| \equiv |DD|'$. Distanța $|AA'|$... între oricare două puncte de pe marginile unei fișii situate la aceeași distanță de $|MN|$ și $|PQ|$ este aceeași. Să se compare ariile celor două fișii.

5. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și coardele $|AB|$ și $|CD|$. Să se determine poziția pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$ a unui punct M astfel ca dreptele MA și MB să determine un segment de lungime dată pe coarda $|CD|$.

6. Fie ABC un triunghi oarecare și G centrul lui de greutate. Dacă $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ și $\overrightarrow{GC}$ sînt vectori ce definesc, respectiv, translațiile T, T' și T'', să se arate că $T \circ T' \circ T''$ este transformarea identică.

7. Să se construiască un segment de dreaptă, de lungime și direcție dată, care se sprijină pe două cercuri date.

8. Să se arate că graficul funcției $f(x) = ax + b$ se poate obține printr-o translație a graficului funcției $g(x) = ax$. Să se găsească în acest caz vectorul $\vec{v}$ al translației.

9. Se dau două drepte paralele d și d'. Să se determine toate translațiile de vector nenul pentru care d' este transformata lui d.

10. Fie translația $T_{\vec{v}}$ de vector nenul $\vec{v}$, dreapta d' transformata unei drepte d prin translația $T_{\vec{v}}$, iar d'' transformata dreptei d' prin aceeași translație $T_{\vec{v}}$. Să se demonstreze că o dreaptă Δ, neparalelă cu dreapta d, taie dreptele d, d' și d'', respectiv, în punctele M, M', M'' și că M' este mijlocul lui $|MM''|$.

11. Să se arate că într-un patrulater care are două laturi opuse congruente, dreapta care unește mijloacele celorlalte două laturi este paralelă cu bisectoarea unghiului format de primele două laturi.

12. Să se arate că dacă dreapta care trece prin mijlocul bazelor unui trapez formează cu laturile neparalele ale trapezului unghiuri congruente, atunci trapezul este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

13. Să se arate că într-un plan π distanța de la punct oarecare P la o dreaptă d este aceeași printr-o translație $T_{\vec{v}}$ de vector nenul $\vec{v}$ aparținînd planului.

14. Să se arate că translația $T_{\vec{v}}$ de vector nenul $\vec{v}$ transformă sfera $\mathcal{S}(O, r)$ într-o sferă $\mathcal{S}'(O', r')$ congruentă cu $\mathcal{S}(O, r)$.

15. Să se demonstreze că dacă F este o mulțime finită de puncte în planul π, atunci nu există nici o translație diferită de transformarea identică care lasă invariată figura F.

16. Să se construiască un patrulater convex $ABCD$ cunoscînd lungimile laturilor și lungimea segmentului ce unește mijloacele laturilor $|AB|$ și $|CD|$.

17. Să se demonstreze că oricare ar fi m natural, există în plan o mulțime de puncte E, finită și nevidă, cu proprietatea că dacă un punct A aparține mulțimii E, atunci în E există m puncte situate la distanța 1 de A.

18. Fie ABC un triunghi echilateral iar $A'B'C'$ triunghiul obținut prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector nenul $\vec{v}$ egal cu latura triunghiului ABC. Să se demonstreze că dreptele $A'B$, $B'C$ și $C'A$ sînt concurente.

19. Se dau cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ și dreapta d ce aparțin unui plan π. Să se construiască o secantă comună, paralelă cu dreapta d, care să determine în cele două cercuri coarde egale.

Soluții, indicații

1. Fie dreapta AB. Pentru a fi transformată în ea însăși de translația $T_{\vec{v}}$ este necesar ca punctul $C = T_{\vec{v}}(\overline{A})$, definit de vectorul $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, să se afle pe AB etc.

2. Se va ține seama că translația este o izometrie.

3. Se aplică punctului A translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} \sim \overrightarrow{MN}$ și se obține punctul $A' = T_{\vec{v}}(A)$, $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{MN}$. Problema se reduce la a găsi punctul N astfel ca $\|A'N\| + \|NB\|$ să fie minimă. Se unește punctul A'' (A'' este sime-

tricul lui A' față de dreapta d) cu punctul B și se obține punctul $\{N\} = d \cap A''B$. Linia frîntă căutată este $AMNB$ (vezi fig. II.10).

4. Se consideră aria figurii $ABDC$, mărginită de segmentul $|AB|$, curba CD și segmentele paralele $|AC|$,

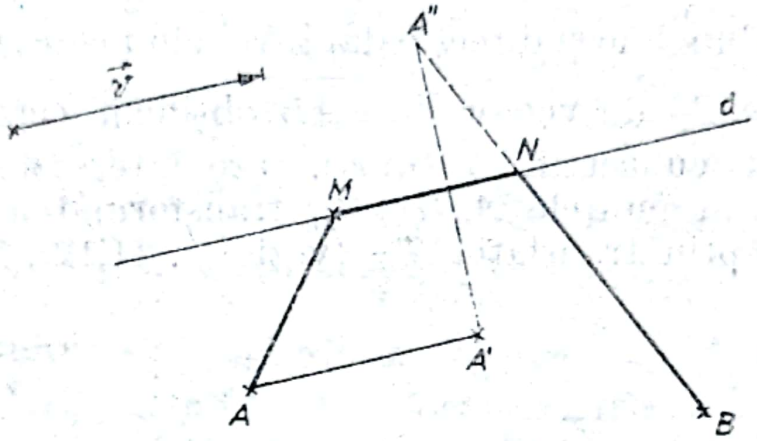


Fig. II.10

$|BD|$, căreia i se aplică translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$, în urma căreia $|AB|$ se va suprapune peste $|A'B'|$ iar curba CD peste curba $C'D'$ etc. Ariile sînt egale (vezi fig. II.11).

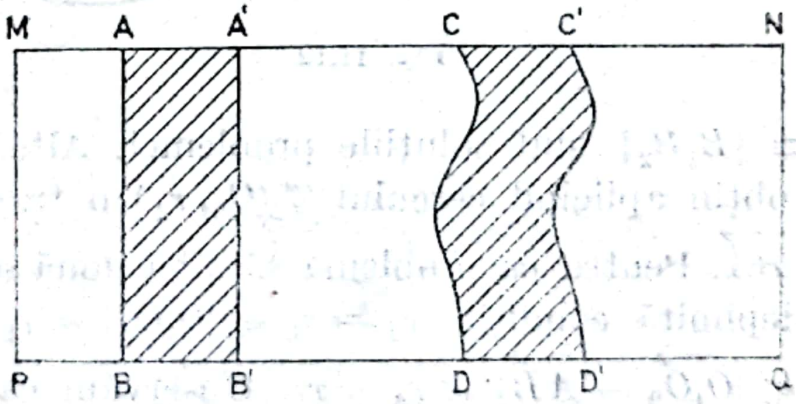


Fig. II.11

5. Construim $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{CD}$. Aplicăm segmentului $|MA|$ translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ care va tăia pe $|MB|$ în punctul $D' \in |CD|$. Avem $\widehat{AMB} \equiv \widehat{A'D'B}$.

Construcție. Construim pe $A'B$ arcul capabil de unghiul $\widehat{AMB}$. La intersecția cu CD găsim punctul D'; BD' taie cercul în punctul căutat.

6. Vezi compunerea translațiilor.

7. Fie cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$; $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ și vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ de lungime și direcție dată. Aplicînd cercului $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ obținem cercul $\mathscr{C}(O, r)$, congruent cu cercul $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$. care intersectează cercul $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ în puntele A_2 și B_2, transformatele punctelor A_1 și B_1 prin translația $T_{\vec{v}}$ (vezi fig. II.12). Segmentele

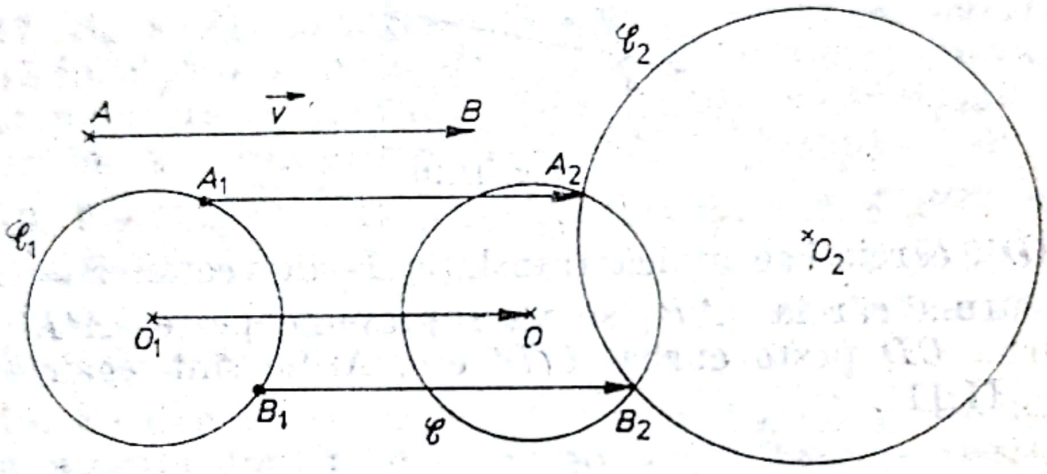


Fig. II.12

$|A_1A_2| \equiv |B_1B_2|$ sînt soluțiile problemei. Alte două soluții se obțin aplicînd cercului $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ o translație de vector $\overrightarrow{BA}$. Pentru ca problema să aibă două soluții trebuie îndeplinită condiția $r_2 - r_1 < |O_1O_2| < r_1 + r_2$ sau $r_2 - r_1 < |\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| < r_2 + r_1$. Observăm că $|\overrightarrow{OO_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}|$; avem o singură soluție dacă $|\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| = r_1 + r_2$ sau $|\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| = r_2 - r_1$. Cînd cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ sînt tangente nu avem soluție dacă

$$|\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| > r_2 + r_1 \text{ sau } |\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| < r_2 - r_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

8. Graficul este o dreaptă și se obține printr-o translație $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$, ce aparține axei Oy și are originea în O; $\|\vec{v}\| = b$.

9. Nu sînt soluții translațiile care conservă cele două drepte date.

10. Translația fiind o izometrie, dreptele d, d' și d'' sînt paralele. Din ipoteză rezultă că ele sînt coplanare; se va arăta că sînt și echidistante etc.

11. Fie patrulaterul $ABCD$ în care $|AD| \equiv |BC|$ iar M și N mijloacele lui $|DC|$, respectiv, $|AB|$. Aplicăm segmentului $|AD|$ o translație $T_{\vec{v}_1}$ de vector $\vec{v}_1 = \overrightarrow{DM}$ și segmentului $|BC|$ translația $T_{\vec{v}_2}$ de vector $\vec{v}_2 = \overrightarrow{CM}$ (vezi fig. II.13), astfel încît se formează triunghiul $A'B'M$ isoscel. Avem $|MA'| \equiv |AD| \equiv |BC| \equiv |MB'|$. Patrulaterul $AA'BB'$ este paralelogram deoarece $|AA'| \equiv |BB'|$, iar punctul N fiind mijlocul lui $|AB|$ este punctul

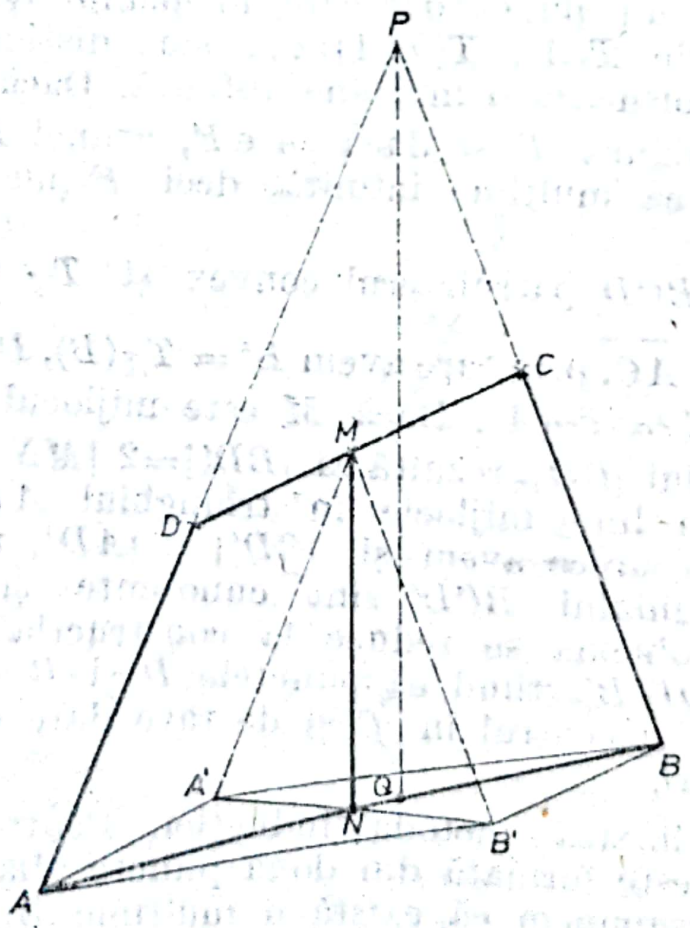


Fig. II.13

de intersecție al diagonalelor $|A'B'|$ și $|AB|$. Segmentul $|MN|$ este mediană în triunghiul isoscel $A'MB'$, deci și bisectoare a unghiului $\widehat{A'MB'}$. Observăm că $\widehat{A'MB'} \equiv \equiv (\widehat{AD, BC})$ ca unghiuri cu laturile paralele. Rezultă că bisectoarele lor sînt paralele, adică $|MN| \parallel |PQ|$, unde PQ este bisectoarea unghiului $(\widehat{AD, BC})$ iar $\{P\} = AD \cap BC$.

12. Translatăm laturile neparalele ale trapezului pînă se intersectează în mijlocul bazei mici. Se obține un triunghi în care segmentul ce unește mijloacele bazelor este bisectoare și mediană etc.

13. Translația fiind o izometrie, se aplică proprietățile acesteia, vezi și teorema 1.3 de la p. 12.

14. Vezi rezolvarea problemei 4 de la p. 16. Se emit judecăți asemănătoare.

15. Dacă $T_{\vec{v}}$ este o translație de vector nenul și dacă A este un punct oarecare în planul translației, atunci punctele $T(A)$, $T(T(A)),\ldots$ sînt distincte două cîte două și formează o mulțime infinită. Dacă $T_{\vec{v}}$ lasă invariată o figură F și dacă $A \in F$, atunci F trebuie să conțină acea mulțime infinită, deci F nu poate fi finită.

16. Fie $ABCD$ patrulaterul convex și $T_{\vec{v}}$ translația de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, prin care avem $B' = T_{\vec{v}}(B)$, $D' = T_{\vec{v}}(D)$ și, evident, $C = T_{\vec{v}}(A)$. Dacă M este mijlocul lui $|AB|$ și N mijlocul lui $|CD|$, rezultă că $|BD'| = 2\,|MN|$ deoarece $|MN|$ devine linie mijlocie în triunghiul ABD' (vezi fig. II.14). Deoarece avem și $|CD'| \equiv |AD|$, rezultă că laturile triunghiului BCD' sînt cunoscute și poate fi construit. Problema se reduce la construcția paralelogramului $BDD'B'$ știind că punctele D și B se află pe două cercuri cu centrul în C și de raze date (laturi ale patrulaterului).

17. Se utilizează metoda inducției. Pentru $m = 1$, mulțimea E este formată din două puncte aflate la distanța 1. Presupunem că există o mulțime E avînd un

Scanned with OKEN Scanner

număr de k elemente, care satisfac condițiile din enunț pentru orice m natural. Considerăm mulțimea E' obținută prin translatarea lui E într-o anumită direcție cu modulul 1. Există cel mult km direcții pentru care mulțimile E și E' nu sînt disjuncte. Există cel mult $2k(k-1)$

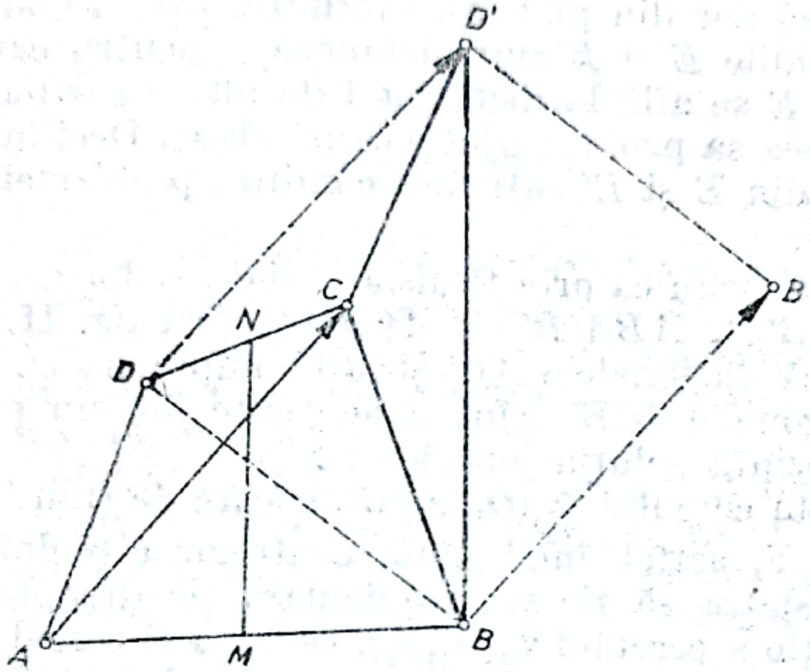


Fig. II.14

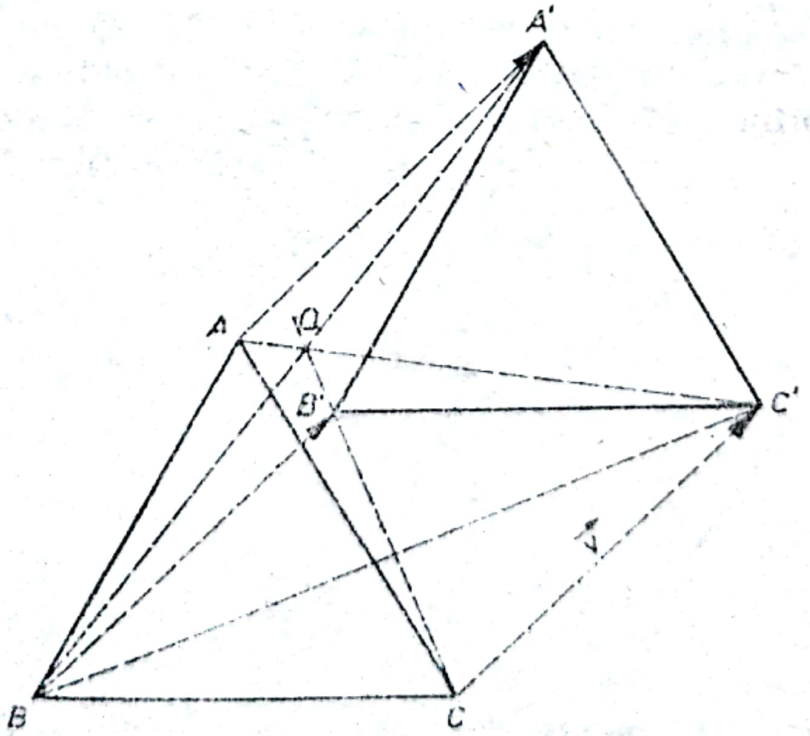


Fig. II.15

Scanned with OKEN Scanner

direcţii pentru care un punct din E' se află la distanţa 1 de alt punct din E decît acela a cărui imagine prin translaţie este. Pentru un punct avem $2(k-1)$ direcţii iar pentru k puncte avem $2k(k-1)$ direcţii întrucît cercurile de rază 1 cu centrele în două puncte distincte au cel mult două puncte de intersecţie. Deoarece mulţimea direcţiilor din plan este infinită, există una pentru care mulţimile E şi E' sînt disjuncte şi pentru care orice punct din E se află la distanţa 1 de un singur punct din E' (imaginea sa prin translaţia respectivă). Deci mulţimea punctelor din E şi E' satisface condiţia problemei pentru $m+1$.

18. Observăm că prin translaţia dată se formează romburile $BCB'C'$, $ABA'B'$ şi $ACA'C'$ (vezi fig. II.15). Se va arăta că diagonalele $|AC'|$ şi $|BA'|$ împreună cu prelungirea diagonalei $|CB'|$ sînt concurente într-un punct Q, care reprezintă soluţia problemei.

19. Dăm cercului $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ o mişcare de translaţie $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$, astfel încît linia centrelor cercului dat şi celui translatat să fie perpendiculară pe dreapta d, iar noua poziţie a cercului $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, care va fi cercul $\mathscr{C}(O, r)$, să devină secant cercului $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$. Secanta comună este soluţia problemei. Problema admite soluţie dacă cercurile se pot aduce în poziţia de cercuri secante prin translaţia $T_{\vec{v}}$.

Scanned with OKEN Scanner

1. ROTAȚIA

Considerăm E^2 plan orientat prin fixarea sensului de rotație trigonometric ca sens pozitiv. Presupunem cunoscute noțiunile de unghi orientat și de măsură algebrică pentru un astfel de unghi. Utilizăm notația $\alpha = \text{măs}\,(\hat{\alpha})$, pentru orice unghi orientat $\hat{\alpha}$.

Definiția 1.1. Fie în planul E^2 un punct fix O și un unghi orientat $\hat{\alpha}$. Numim *rotație* de centru O și unghi $\hat{\alpha}$, transformarea $R(O, \alpha): E^2 \to E^2$ ce asociază oricărui punct din planul E^2 punctul M' caracterizat prin condițiile:

a) $|OM'| \equiv |OM|$;

b) $\widehat{MOM'} = \hat{\alpha}$.

Spunem că M' este imaginea punctului M prin rotația de centru O și unghi $\hat{\alpha}$ și convenim să notăm $M' = R(O, \alpha)(M)$ sau, cînd nu este pericol de confuzie, vom nota $M' = R(M)$ (vezi fig. III.1).

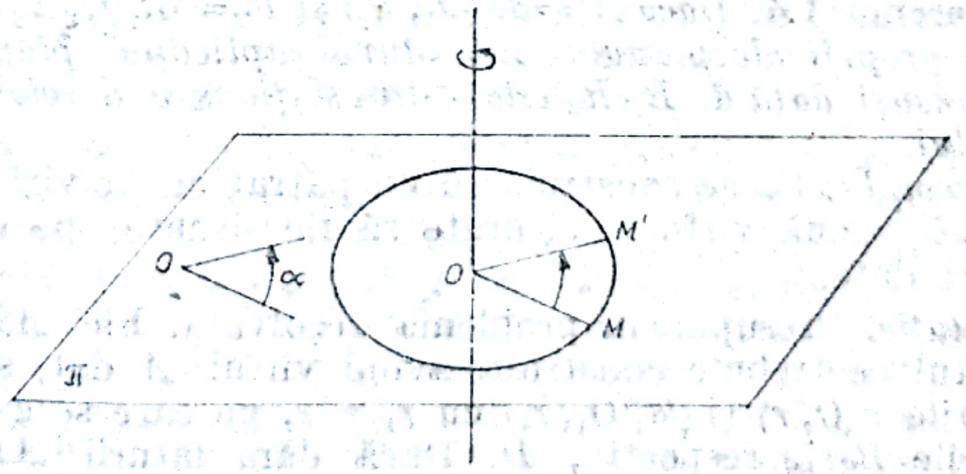


Fig. III.1

Pentru $M = O$ va rezulta $M' = O$ (punct invariat prin rotația $R(O, \alpha)$).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\alpha = 0°$, rotația R coincide cu transformarea identică.

Pentru $\alpha = 180°$, rotația de centru O este simetria față de punctul O.

Pentru $\alpha \neq 0°$ și $\alpha \neq 180°$, rotația de centru O și unghi $\hat{\alpha}$ se numește rotație proprie.

Proprietățile principale ale rotației sînt caracterizate de următoarele teoreme.

Teorema 1.1. 1) *Dacă* $R_1 = R(O, \alpha_1)$ *și* $R_2 = R_2(O, \alpha_2)$ *sînt rotații de centru* O, *atunci* $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = R(O, \alpha_1 + \alpha_2)$.

2) *Pentru orice* $\hat{\alpha}$, $R^{-1}(O, \alpha)$ *există și avem* $R^{-1}(O, \alpha) = R(O, -\alpha)$.

3) *Orice rotație este o izometrie.*

Din cele de mai sus rezultă că mulțimea tuturor rotațiilor de centru O ale planului E^2 formează un grup comutativ în raport cu operația de compunere, grup numit și grupul rotațiilor de centru O.

Teorema 1.2. *Rotația* $R(O, \alpha)$, $\alpha \neq 0$, *admite un singur punct fix, centrul* O: *nu admite drepte fixe; păstrează lungimile segmentelor și măsura unghiurilor; o dreaptă arbitrară* d *formează cu dreapta imagine* $d' = R(O, \alpha)(d)$ *cel puțin un unghi congruent cu unghiul de rotație; invariază cercul de centru* C *și rază* r *dacă și numai dacă* $C = O$.

Teorema 1.3. *Dacă* T *este o translație de vector nenul iar* R_1 *și* R_2 *sînt rotații proprii ale planului* E^2, *atunci* $T \circ R$ *și* $R \circ T$ *sînt transformări distincte ale planului în el însuși.*

Teorema 1.4. *Dacă* $R_1 = R_1(O_1, \alpha_1)$ *și* $R_2 = R_2(O_2, \alpha_2)$ *sînt rotații proprii ale planului* E^2, *atunci aplicația planului în el însuși dată de* $R_1 \circ R_2$ *este o translație sau o rotație a planului.*

Exemplu. Să se construiască un pătrat cu un vîrf dat, iar cele două vîrfuri alăturate să fie situate pe două cercuri date.

Soluție. Presupunem problema rezolvată. Fie $ABCD$ pătratul ce trebuie construit, avînd vîrful A dat, și fie cercurile $\mathscr{C}(O, r)$ și $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ cu $r_1 > r$, pe care se găsesc vîrfurile B și, respectiv, D. Dacă dăm laturii $|AB|$ o rotație R de centru A și unghi $\alpha = 90°$, obținem punctul D. Rezultă că $D = R(A, 90°)(B)$. Găsirea punctului D reprezintă cheia rezolvării problemei.

Scanned with OKEN Scanner

Construcție. Observăm că dacă unim vîrful A cu centrul O al cercului $\mathscr{C}$ și-i dăm acestuia rotația $R(A,90°)$, obținem punctul $O' = R(O)$. Construim cercul $\mathscr{C}'(O', r)$, care intersectează cercul $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ în punctele D și D_1 (vezi fig. III.2). Punctul D este transformatul prin rotația $R(A, 90°)$ al unui punct ce aparține cercului $\mathscr{C}$, pe care-l putem găsi dînd segmentului $|AD|$ o rotație de centru A și unghi $\alpha = 90°$; acesta este punctul B și putem construi pătratul în condițiile impuse de problemă.

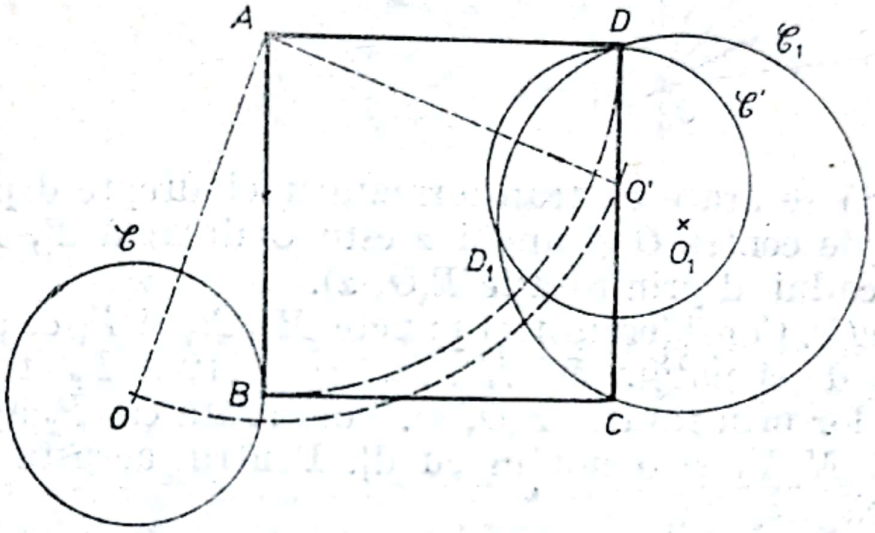


Fig. III.2

2. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie M și N două puncte distincte ale unei figuri plane (F), iar M' și N' omoloagele lor prin transformarea definită de rotație R. Să se determine poziția centrului rotației și unghiul de rotație al figurii (F).

Soluție. Punctul M' fiind omologul lui M, rezultă că M' este imaginea punctului M obținut printr-o rotație al cărei centru îl notăm cu O. Rotația fiind o izometrie, iar punctele M și M' omoloage, rezultă că vom avea: $|OM| \equiv |OM'|$. Rezultă că centrul O al rotației se va găsi pe mediatoarea segmentului $|MM'|$ (vezi fig. III.3). De asemenea, punctele N și N' fiind omoloage prin transformarea definită de aceeași rotație și același centru O, avem $|ON| \equiv |ON'|$ și deci centrul rotației se va afla și pe mediatoarea segmentului $|NN'|$. Rezultă că centrul rotației R se află la intersecția mediatoarelor

Scanned with OKEN Scanner

segmentelor $|MM'|$ și $|NN'|$, iar unghiul este determinat de dreptele OM, OM' sau ON și ON'.

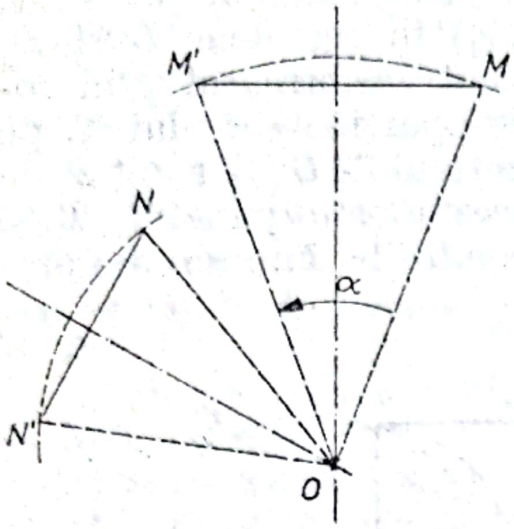


Fig. III.3

2. Să se arate că transformata unei drepte d printr-o rotație de centru O și unghi α este o dreaptă d_1', numită imaginea lui d prin rotație $R(O, \alpha)$.

Soluție. Considerăm trei puncte M_1, N_1 și P_1 ce aparțin dreptei d și notăm cu M_2, N_2, respectiv, P_2 transformatele lor prin rotația $R(O, \alpha)$. Vom arăta că P_2 aparține dreptei M_2N_2 și o notăm cu d_1'. Pentru aceasta se va arăta că

$$\Delta M_1ON_1 \equiv \Delta M_2ON_2 \text{ și } \Delta N_1OP_1 \equiv \Delta N_2OP_2.$$

Va rezulta că unghiurile $\widehat{M_1N_1O}$ și $\widehat{ON_1P_1}$ sînt suplimentare, deci și congruentele acestora obținute prin rotația $R(O,\alpha)$ sînt suplimentare. Cum măs $(\widehat{M_2N_2O}) +$ $+$ măs $(\widehat{ON_2P_2}) = 180°$ rezultă că M_2, N_2 și P_2 sînt coliniare, deci aparțin dreptei d_1', transformata dreptei d, adică $P_2 \in M_2N_2$.

3. Să se arate că rotația transformă un cerc într-un cerc congruent.

Soluție. Considerăm cercul $\mathscr{C}$ de centru O și rază r și un punct M aparținînd cercului. Prin rotația de centru O și unghi α cercul $\mathscr{C}$ se transformă în $\mathscr{C}_1$ iar M în M_1 (vezi fig. III.4). Distanța fiind invariată printr-o rotație, avem $\|O_1M_1\| = \|OM\| = r$. Deci locul geometric al punctelor M_1 este cercul cu centrul în O_1 și rază r congruent cu cercul dat.

Scanned with OKEN Scanner

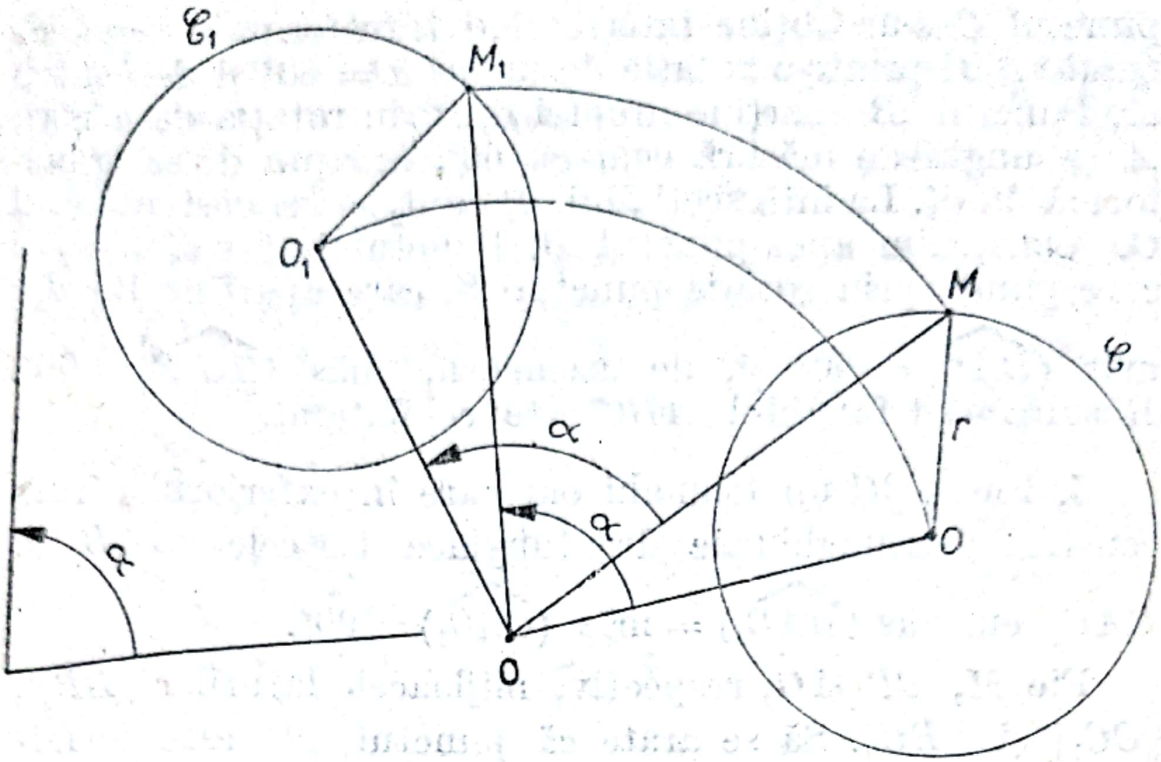


Fig. III.4

4. Să se construiască un triunghi echilateral cu un vîrf dat, iar celelalte două vîrfuri să fie situate pe două drepte date.

Soluție. Presupunem problema rezolvată și construim triunghiul echilateral ABC, cu vîrfurile B și C pe dreptele d_1, respectiv, d_2 (vezi fig. III.5). Dacă B ar fi cunoscut,

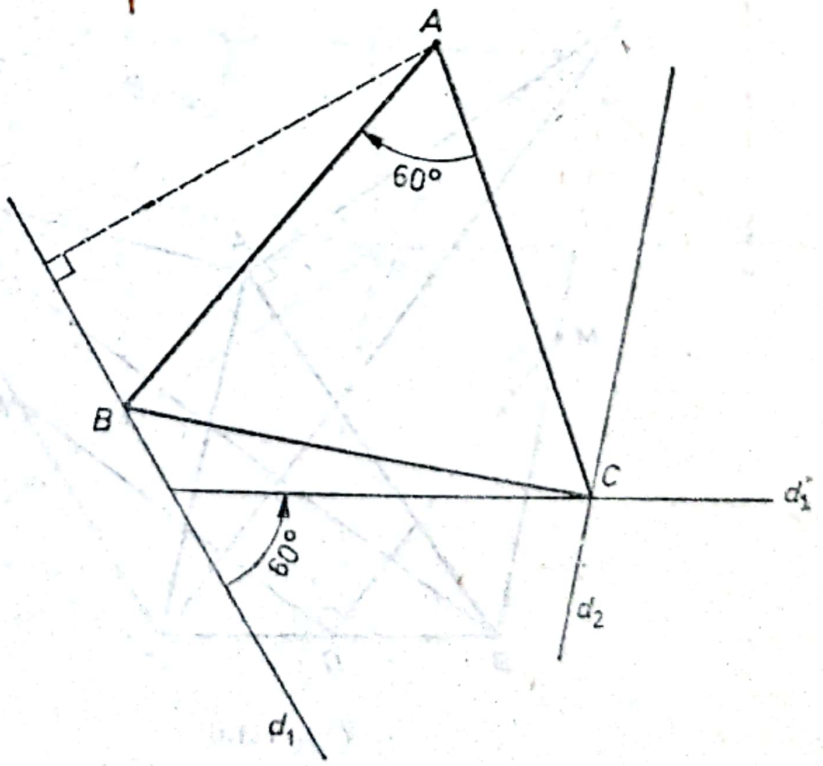


Fig. III 5

punctul C s-ar obține intersectînd transformata segmentului $|AB|$ printr-o rotație de unghi $\alpha = 60°$ și de centru A. Punctul B aparține dreptei d_1. Prin rotația de centru A și unghi de măsură egal cu 60°, dreapta d_1 se transformă în d_1'. La intersecția lui d_1' cu d_2 se va găsi punctul C. Construim apoi punctul B. Punctului $C \in d_1' \cap d_2$ îi corespunde prin rotație punctul B, care aparține lui d_1; măs $(\widehat{BAC}) = 60°$ și, de asemenea, măs $(\widehat{ACB}) = 60°$. Rezultă că triunghiul ABC este echilateral.

5. Fie ABC un triunghi oarecare în exteriorul căruia construim triunghiurile dreptunghice isoscele BAB_1 și CAC_1 cu măs $(\widehat{BAB_1}) =$ măs $(\widehat{CAC_1}) = 90°$.

Fie M, M' și O, respectiv, mijloacele laturilor $|BB_1|$, $|CC_1|$ și $|BC|$. Să se arate că punctul M' este imaginea punctului M prin rotația plană de centrul O și unghi $\alpha = 90°$.

Soluție. Arătăm că $OM \perp OM'$ și problema este rezolvată. În triunghiurile BCB_1 și BCC_1, $|OM|$, respectiv, $|OM'|$ sînt linii mijlocii (vezi fig. III.6). Dacă $|BC_1| \equiv |CB_1|$ rezultă și $|OM| \equiv |OM'|$. Se arată că $\Delta AB_1C \equiv \Delta ABC_1$ și deci

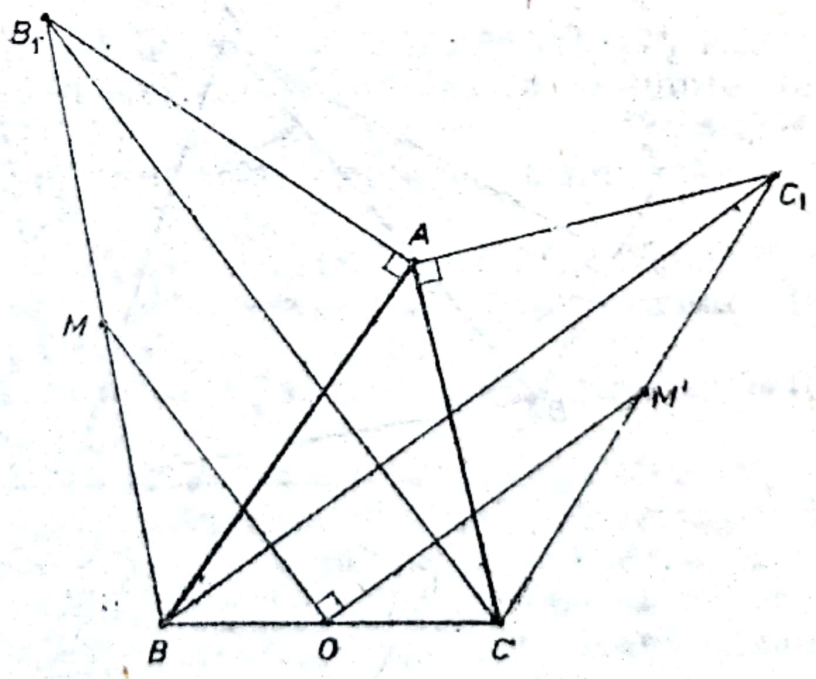


Fig. III.6

Scanned with OKEN Scanner

$|OM| \equiv |OM'|$. Arătăm că $B_1C \perp BC_1$ din care rezultă că și $OM \perp OM'$. Observăm că prin rotația de centru A și unghi $\alpha = 90°$ se obține $R(A, 90°)(B) = B_1$, $R(A, 90°)(C_1) = C$. Deci $R(A, 90°)(BC_1) = B_1C$ și atunci $BC_1 \perp B_1C$, de unde rezultă că $OM \perp OM'$.

6. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$, spre exterior, se construiesc pătrate. Notăm cu O_1, O_2, O_3 și O_4 centrele acestor pătrate, cu I, J mijloacele diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$, iar cu H și K mijloacele segmentelor $|O_1O_3|$ și $|O_2O_4|$.

a) Să se arate că $|O_1O_3| \equiv |O_2O_4|$ și $|O_1O_3| \perp |O_2O_4|$.

b) Să se indice natura patrulaterului $IKJH$.

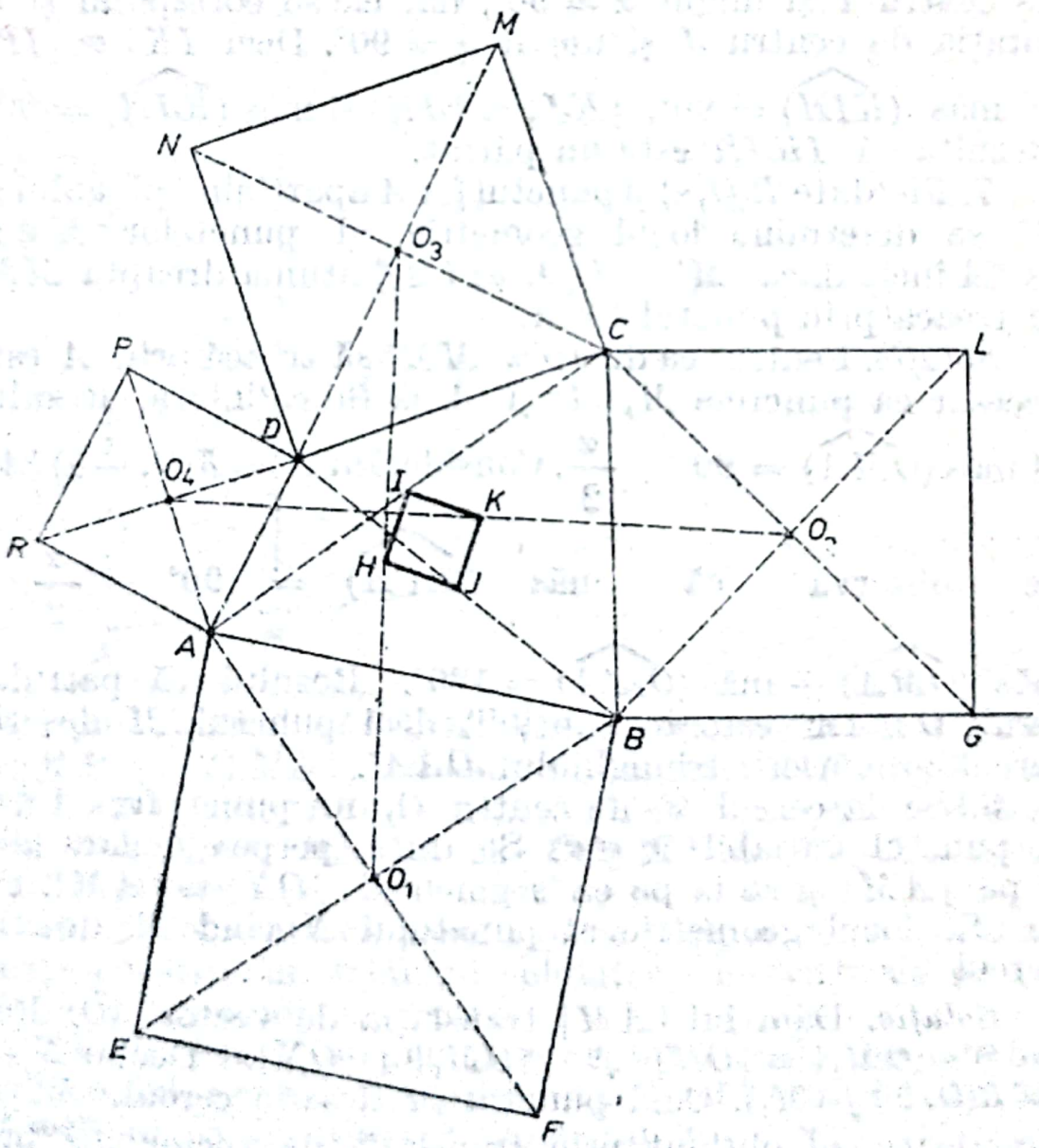


Fig. III.7

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Aplicînd rezultatul de la problema 5 triunghiurilor ABC și ACD și punctelor O_1, O_2 și O_3, O_4, obținem :

$$|IO_1| \equiv |IO_2|, \text{ măs } (\widehat{O_1IO_2}) = 90°;$$

$$|IO_3| \equiv |IO_4|, \text{ măs } (\widehat{O_3IO_4}) = 90°.$$

Rezultă că segmentul $|O_2O_4|$ este transformatul lui $|O_1O_3|$ în rotația de centru I și unghi $\alpha = 90°$ (vezi fig. III.7).

Deci $|O_1O_3| \equiv |O_2O_4|$ și măs $(\widehat{O_1O_3, O_2O_4}) = 90°$. Rezultă că segmentele $|O_1O_3|$ și $|O_2O_4|$ sînt congruente și perpendiculare.

b) Observăm că $|O_1O_3|$ și $|O_2O_4|$ se corespund în rotația de centru I și unghi $\alpha = 90°$, dar ele se corespund și în rotația de centru J și unghi $\alpha = 90°$. Deci $|IK| \equiv |IH|$ și măs $(\widehat{KIH}) = 90°$, $|KJ| \equiv |JH|$ și măs $(\widehat{KJH}) = 90°$. Rezultă că $IKJH$ este un pătrat.

7. Fie date $R(O, \alpha)$ și punctul fix A aparținînd planului π. Să se determine locul geometric al punctelor $M \in \pi$, astfel încît dacă $M' = R(O, \alpha)(M)$, atunci dreapta MM' să treacă prin punctul fix A.

Soluție. Pentru ca dreapta MM' să treacă prin A este necesar ca punctele M, M' și A să fie coliniare. Rezultă că măs $(\widehat{OMA}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Considerăm $A' = R(O, -\alpha)(A)$.

Se observă că măs $(\widehat{OA'A}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ și măs $(\widehat{OMA})$ + măs $(\widehat{OA'A}) = 180°$. Rezultă că patrulaterul $OMAA'$ este inscriptibil, deci punctul M descrie cercul circumscris triunghiului OAA'.

8. Se dă cercul $\mathscr{C}$ de centru O, un punct fix $A \in \mathscr{C}$ și punctul variabil $M \in \mathscr{C}$. Se duce perpendiculara din O pe $|AM|$ și se ia pe ea segmentul $|ON| \equiv |AM|$. Să se afle locul geometric al punctului N cînd M descrie cercul $\mathscr{C}$.

Soluție. Dăm lui $|AM|$ translația de vector $\overrightarrow{AO}$. Rezultă $|OM_1| \equiv |ON|$ și $|OM_1| \perp |ON|$. Deci $N = R(O, 90°)(M_1)$. Cînd punctul M descrie cercul, N va descrie cercul obținut prin translația de vector $\overrightarrow{AO}$ urmată de rotația $R(O, 90°)$.

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se arate că patrulaterul în care lungimea segmentului determinat de mijloacele a două laturi opuse este egală cu semisuma lungimilor celorlalte laturi este un trapez.

Soluție. Fie $ABCD$ patrulaterul dat iar M și N mijloacele laturilor $|AB|$, respectiv, $|CD|$. Rotind patrulaterul $AMND$ în plan, în jurul punctului N, cu unghiul $\alpha = 180°$, vîrful D va coincide cu C, iar M și A vor fi transformate în M' și A' (vezi fig. III.8). Punctele M, N și M' vor fi coliniare, iar $M'A' \parallel MB$ și $MM' \parallel A'B$.

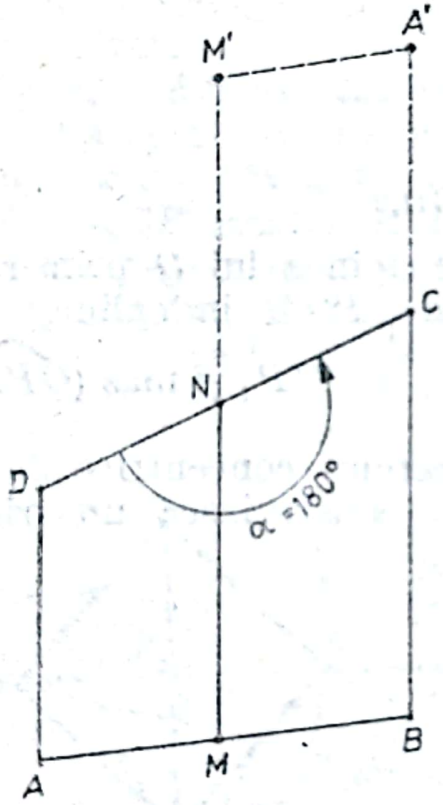


Fig. III.8

Deci patrulaterul $MBA'M'$ este paralelogram cu $\| A'B \| = \| MM' \| = 2 \| MN \|$. Dar conform ipotezei $\| AD \| + \| BC \| = 2 \| MN \|$, de unde rezultă $\| BC \| + \| CA' \| = \| A'B \|$, deci $C \in |A'B|$. Rezultă că $BC \parallel MN$ și $AD \parallel MN$ deci $ABCD$ este trapez.

10. Să se arate că pentru orice poligon convex dat se poate construi un triunghi echilateral cu vîrfurile pe laturile poligonului respectiv.

Soluție. Fie P un punct aparținînd uneia din laturile poligonului. Considerăm rotația $R(P, 60°)$ (vezi fig. III.9). Observăm că frontiera poligonului rotit mai intersectează frontiera poligonului dat în cel puțin un punct,

Scanned with OKEN Scanner

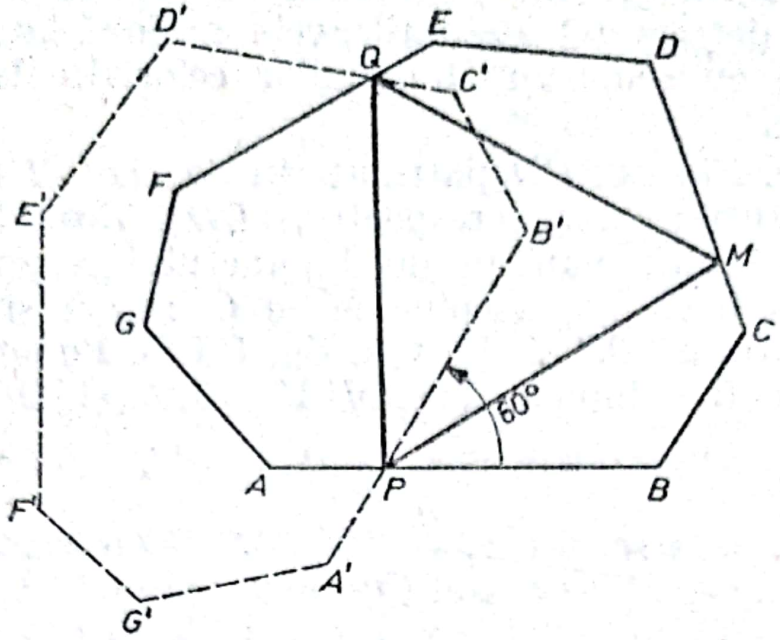


Fig. III.9

fie acesta Q, și fie M preimaginea lui Q prin rotația considerată. Atunci triunghiul PQM îndeplinește condițiile problemei deoarece $|PQ| \equiv |MP|$ și măs $(\widehat{QPM}) = 60°$.

11. Fie $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, și $\mathscr{C}_3$ trei cercuri concentrice de raze r_1, r_2 și r_3; $r_1 < r_2 < r_3$. Să se construiască un triunghi

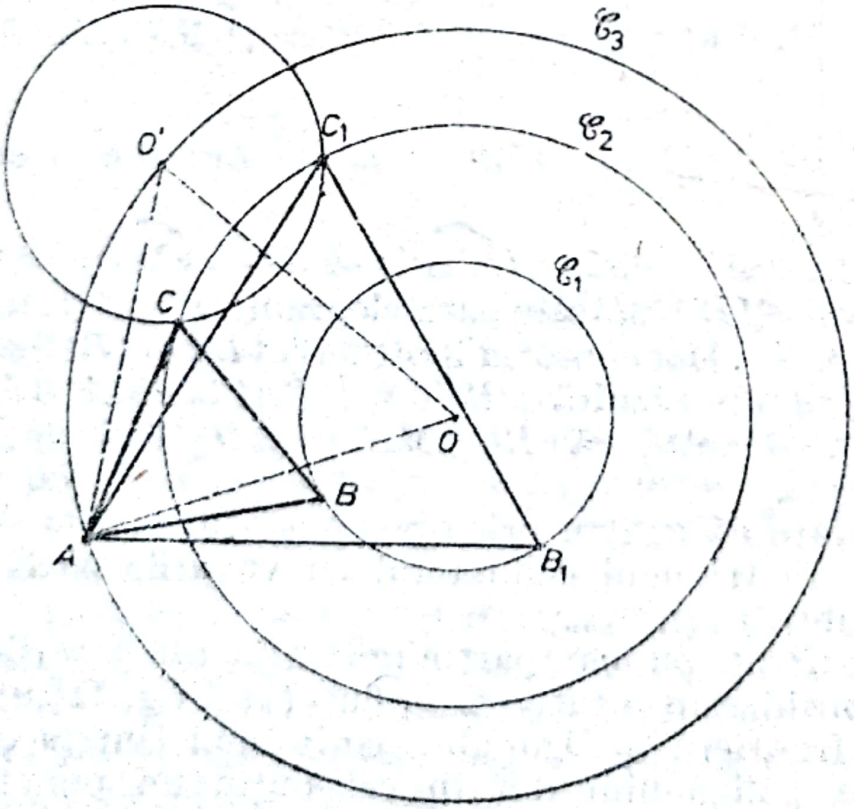


Fig. III.10

Scanned with OKEN Scanner

echilateral ABC care să îndeplinească condiția: $A \in \mathscr{C}_3$, $B \in \mathscr{C}_1$, $C \in \mathscr{C}_2$. Cîte soluții are problema?

Soluție. Considerăm că $A \in \mathscr{C}_3$ și $B \in \mathscr{C}_1$. Rotim cercul $\mathscr{C}_1$ în jurul lui A cu un unghi $\alpha = 60°$. Transformatul centrului O va fi $O' \in \mathscr{C}_3$. Intersecția cercurilor $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = C$ va fi al treilea vîrf al triunghiului căutat (vezi fig. III.10). Dacă

$r_1 > r_3 - r_2$ există două soluții;

$r_1 = r_3 - r_2$ există o singură soluție;

$r_1 < r_3 - r_2$ problema nu are soluție.

12. Fie $ABCD$ un paralelogram pe laturile căruia se construiesc, în exterior, pătrate ale căror centre le notăm, respectiv, cu O_1, O_2, O_3 și O_4. Să se arate că figura $O_1O_2O_3O_4$ este un pătrat.

Soluție. $\Delta ABF \equiv \Delta ADG$ deoarece $|AF| \equiv |AD|$ și $|AB| \equiv |AG|$ iar unghiurile FAB și DAG sînt congruente, avînd laturile perpendiculare. Aplicînd triunghiului ABF rotația $R(A, 90°)$, în sens invers trigonometric, obținem exact $G = R(A, 90°)(B)$ și $D = R(A, 90°)(F)$ (vezi fig. III.11), de unde rezultă că

$$|FB| \equiv |DG| \text{ și } |FB| \perp |DG|. \qquad 1)$$

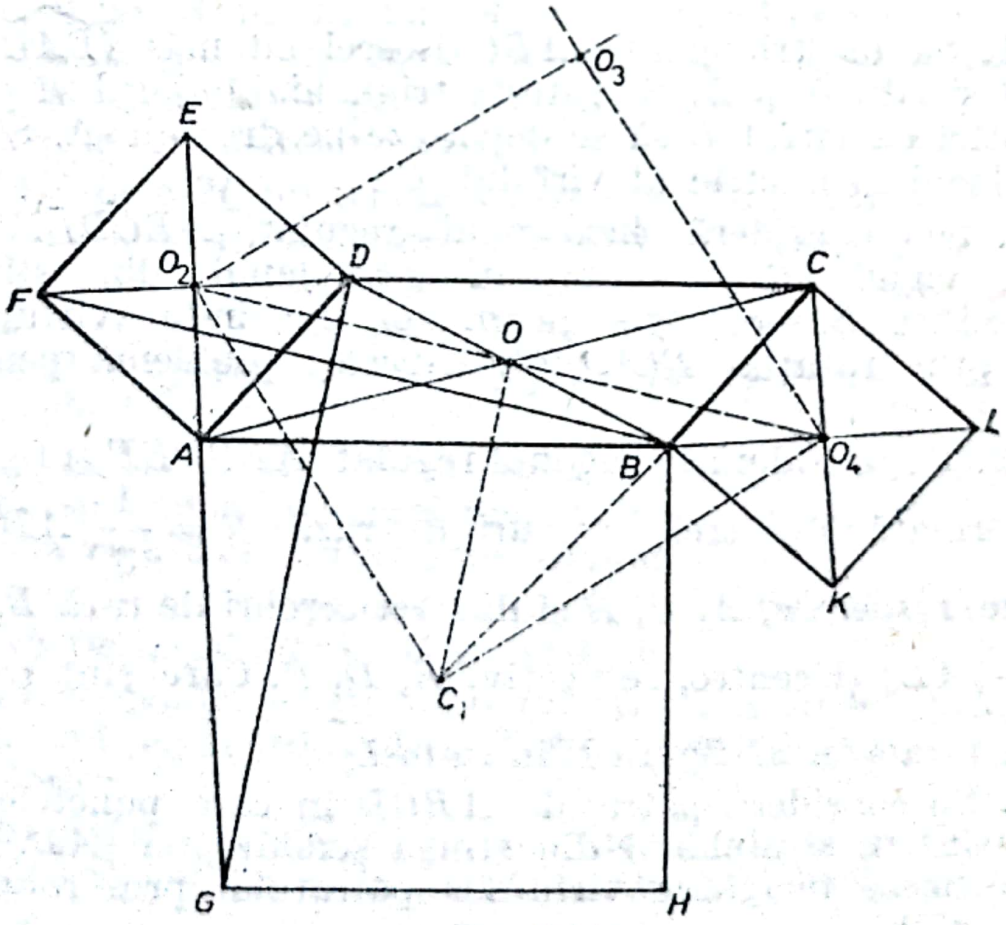


Fig. III.11

Fie O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului dat, care are proprietatea că le înjumătățește. În triunghiul FBD, $|OO_2|$ este linie mijlocie. Rezultă că $|OO_2| = \frac{1}{2}|FB|$ și $|OO_2| \parallel |FB|$, deci

$$|OO_2| \perp |DG|. \tag{2}$$

În triunghiul BGD, $|OO_1|$ este linie mijlocie. Rezultă că $|OO_1| = \frac{1}{2}|DG|$ și $|OO_1| \parallel |DG|$. Deci

$$|OO_1| \perp |FB|. \tag{3}$$

Ținînd cont de (1), (2) și (3) rezultă că $|OO_1| \perp |OO_2|$ și $|OO_1| \equiv |OO_2|$. Prin urmare punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 (demonstrația este identică pentru O_3 și O_4) sînt vîrfurile unui pătrat cu centrul O.

3. PROBLEME PROPUSE

1. Să dă triunghiul ABC isoscel cu măs $(\widehat{BAC}) = 30°$ și o dreaptă Δ. Se rotește triunghiul în jurul vîrfului A astfel ca vîrful B să se deplaseze pe dreapta Δ. Să se afle locul geometric al vîrfului C.

2. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ în care vîrful C se află în semiplanul din stînga dreptei AB. Să se precizeze imaginile vîrfurilor sale prin rotația $R(A, 60°)$. Aceeași problemă pentru $R(A, -60°)$.

3. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ și figura N, formată de trei cercuri de rază $R = \frac{1}{3}|AB|$ și centre, respectiv, A, C, E și din trei cercuri de rază $R_1 = \frac{1}{4}|AB|$ și centre, respectiv, B, D, F. Care sînt rotațiile ce transformă figura N în ea însăși?

4. Se consideră pătratul $ABCD$ în care punctele C și D sînt în semiplanul din stînga semidreptei $|AB$. Să se precizeze imaginile vîrfurilor pătratului prin rotația $R(A, 45°)$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC', BCA' și CAB'. Să se arate că :

a) Centrele acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.

b) Dreptele AA', BB' și CC' sînt concurente și $|AA'| \equiv |BB'| \equiv |CC'|$.

6. Fie ABC un triunghi echilateral :

a) Care sînt rotațiile care lasă invariat acest triunghi ?

b) Să se arate că produsul acestor rotații este transformarea identică.

7. Să se aplice punctului M de coordonate (x_0, y_0) translația de componente (a, b) și apoi punctului obținut, o rotație de unghi α în jurul originii. Să se aplice apoi aceluiași punct, în primul rînd rotația de unghi α și apoi rezultatului obținut translația de componente (a, b). Se obține același punct ?

8. Să se arate că izometria T a unui plan π care lasă invariat un punct $O \in \pi$ este rotația de centru O.

9. Fie $|AB|$ și $|A_1B_1|$ două segmente congruente. Dacă M_1 este centrul de rotație care transformă pe A în A_1 și pe B în B_1, iar M_2 este centrul de rotație care transformă pe A în B_1 și pe B în A_1, să se arate că dreapta M_1M_2 trece prin mijlocul segmentului ce unește mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|A_1B_1|$.

10. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe laturile $|AB|$ și $|BC|$ se construiesc pătrate avînd centrele O_1 și O_2. Punctele C și O_1 se află de aceeași parte a lui $|AB|$, iar A și O_2 sînt de o parte și de alta a lui $|BC|$. Să se arate că dreptele AC și O_1O_2 se intersectează sub un unghi de 45°.

11. Să se arate că în orice triunghi ascuțitunghic există un punct și numai unul pentru care suma distanțelor la cele trei vîrfuri este minimă.

12. Fie $n \geqslant 3$ puncte în planul π astfel încît oricare trei să fie necoliniare. Să se arate că :

a) Se poate construi un cerc care să treacă prin cel puțin trei puncte din cele n și să nu conțină nici un punct în interior.

b) Există un cerc ce trece prin cel puțin trei puncte din cele n date și să le conțină pe toate celelalte în interior.

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie $ABCD$ și $BNMK$ două pătrate care nu au puncte interioare comune (numerotarea vîrfurilor făcîndu-se în același sens). Folosind o rotație convenabilă să se arate că mijlocul E al lui $|AN|$, piciorul F al perpendicularei din B pe $|CK|$ și punctul B sînt coliniare.

14. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, unghiurile lui fiind împărțite în cîte trei părți congruente prin semidreptele $|AM$, $|AN$, $|BN$, $|BP$ ș.a.m.d. Se obține astfel hexagonul $MNPQRS$. Să se demonstreze că acest hexagon este regulat.

15. Să se taie în trei părți o bucată de hîrtie care are formă de triunghi ascuțitunghic sau dreptunghic, astfel încît din părțile obținute să putem forma un dreptunghi.

16. Fie ABC un triunghi oarecare. În planul său și în exterior se construiesc triunghiurile ABR, CAQ, BCP astfel încît:

măs $(\widehat{ABR})$ = măs $(\widehat{BAR})$ = 15°;

măs $(\widehat{CAQ})$ = măs $(\widehat{CBP})$ = 45°;

măs $(\widehat{ACQ})$ = măs $(\widehat{BCP})$ = 30°.

Să se arate că $|PR| \equiv |RQ|$ și măs $(\widehat{PRQ})$ = 90°.

17. Se rotește, în sens trigonometric, un pătrat $ABCD$ în jurul punctului A cu un unghi α și se obține pătratul $AB'C'D'$.

a) Să se afle locul geometric al punctului $\{M\} = BB' \cap DD'$ cînd unghiul α variază.

b) Să se arate că dreptele BB', CC' și BD' sînt concurente.

c) Să se arate că punctul M este mijlocul lui $|CC'|$.

18. Fiind date un punct fix O și segmentele x, y, z, să se demonstreze că se poate construi triunghiul echilateral ABC, avînd $|OA| = x$, $|OB| = y$, $|OC| = z$, dacă: $x + y \geqslant z$; $y + z \geqslant x$; $z + x \geqslant y$.

19. Fie unghiul xOy pe laturile căruia se iau segmentele $|OA|$ și $|OB|$. Să se determine două drepte perpendiculare d_1 și d_2, trecînd prin punctul O, astfel încît proiecțiile segmentelor $|OA|$ pe d_1 și $|OB|$ pe d_2 să fie congruente *(G. Țițeica)*.

Scanned with OKEN Scanner

1. Vîrful C descrie dreapta Δ', transformata prin rotația dreptei Δ în jurul vîrfului fix A, cu un unghi $\alpha = 30°$ (vezi fig. III.12).

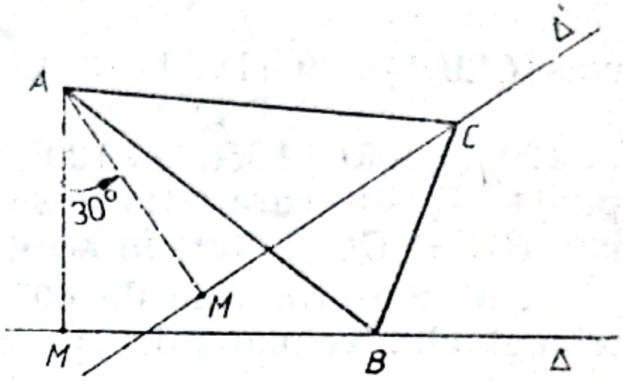


Fig. III.12

3. Fie O centru hexagonului regulat. Rotațiile căutate sînt $R(O,0°)$ și $R(O,120°)$.

5. a) $R(O_1,120°)(B) = C$, $R(O_2,120°)(A) = C$. Deci produsul lor duce pe B în A (vezi fig. III.13). Rotația ce duce pe B în A de unghi $\alpha = 240°$ este cea de centru O_3. Produsul rotațiilor de centru O_1, respectiv, O_2 se face unind O_1 cu O_2 și construind unghiuri de măsură egală cu 60°, adică un triunghi echilateral.

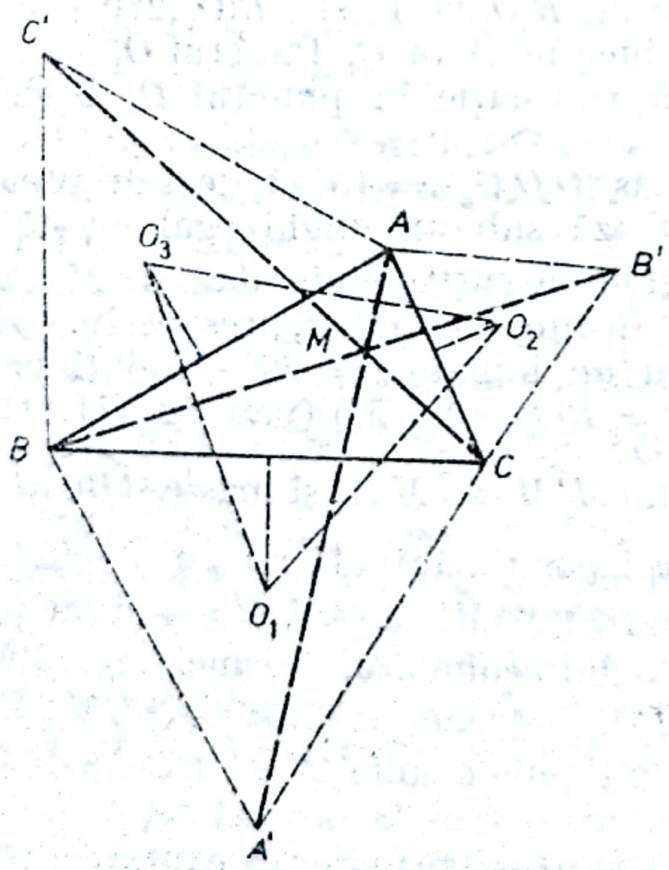


Fig. III.13

b) $R(A,60°)\ (B) = C'$ și $R(A,60°)(B') = C$. Deci cele două rotații duc triunghiul ABB' peste triunghiul $AC'C$. Rezultă că $|BB'| \equiv |CC'|$ și măs $(\widehat{C'MB}) = 60°$. Atunci patrulaterul $C'AMB$ este inscriptibil și măs $(C'MA) = 60°$; la fel măs $(\widehat{AMB}) = 120°$, măs $(\widehat{BMC}) = 120°$ și măs $(\widehat{AMC}) = 120°$. Rezultă că există un singur punct M din care laturile se văd sub un unghi de 120° iar BB' și CC' se taie în acest punct. La fel BB' și AA'.

6. a) Sînt rotațiile de 60° și 120° în jurul centrului triunghiului echilateral.

7. Nu.

8. Dacă izometria T admite ca singur punct invariant pe $O \in \pi$, atunci T este o rotație.

9. Rotația de centru M_1 transformă mijlocul S al segmentului $|AB|$ în mijlocul S_1 al segmentului $|A_1B_1|$. Rezultă că M_1 este situat pe mediatoarea segmentului $|SS_1|$. La fel M_2 este situat pe mediatoarea segmentului $|SS_1|$.

10. Compunînd rotațiile $R(O_1,90°)$ și $R(O_2,270°)$ obținem o translație care duce pe A în C. Punctul O_1 se va transforma prin această translație în punctul O_1' astfel încît $\overrightarrow{O_1O_1'} \sim \overrightarrow{AC}$; dar măs $(\widehat{O_1'O_1O_2}) = 45°$ și deci dreptele AC și O_1O_2 se intersectează sub un unghi egal cu 45°.

11. Fie ABC triunghiul ascuțitunghic dat și M un punct în interiorul lui. Rotim pe $|BA|$, respectiv, pe $|BM|$ în jurul lui B cu un unghi $\alpha = 60°$ și obținem $A' = R(B, 60°)(A)$ și $M' = R(B, 60°)(M)$ (vezi fig. III.14). Obținem $|A'M'| \equiv |AM|$, $|M'M| \equiv |MB|$ și măs $(\widehat{A'BC}) =$ măs $(\widehat{ABC}) + 60°$. Deci poziția lui A' nu va depinde de M și vom avea $\|A'C\| \leqslant \|A'M'\| + \|M'M\| + \|MC\|$. Dacă A', M', M și C sînt coliniare, atunci rezultă că $\|A'C\| \leqslant \|A'M'\| + \|M'M\| + \|MC\| = \|AM\| + \|BM\| + \|CM\|$. Dar există un punct unic $N \in |A'C|$ astfel încît măs $(\widehat{A'NB}) = 60°$. Acesta este punctul căutat.

Scanned with OKEN Scanner

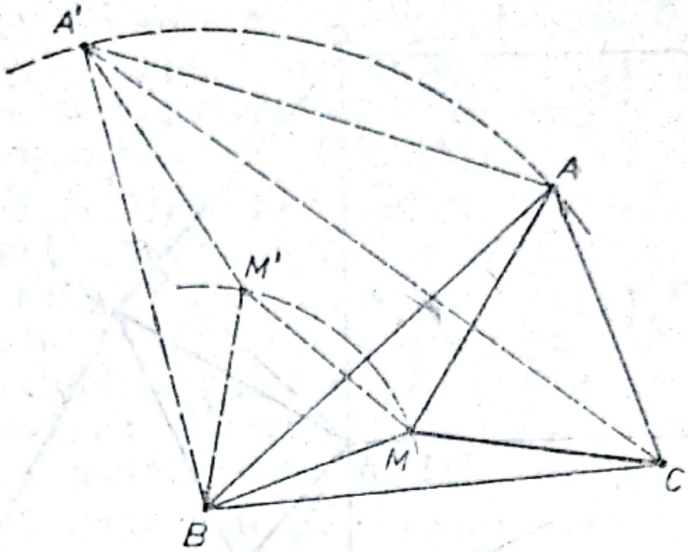


Fig. III.14

12. a) Mulțimea de puncte fiind finită, există o dreaptă care situează toate punctele într-un singur semiplan determinat de ea. Translatăm această dreaptă pînă atinge un punct și apoi o rotim în jurul acestui punct pînă va trece prin alt punct. Aceste puncte sînt cele căutate. Să le notăm cu M și N. Considerăm toate unghiurile $\widehat{MPN}$, unde P aparține mulțimii de puncte date. Alegem punctul Q astfel încît măs $(\widehat{MQN})$ să fie maximă. Se va arăta că cercul ce trece prin M, Q, N este cel căutat.

b) Se va alege Q astfel încît măs $(\widehat{MQN})$ să fie minimă. Se arată că cercul ce trece prin M, Q, N este cel căutat.

13. Considerăm $R(B, 90°)$ $(N) = K$. Fie A' și E' transformatele prin rotația dată a lui A, respectiv, E. Segmentul $|BE'|$ este linie mijlocie în triunghiul $CA'K$. Dacă F este piciorul perpendicularei din B pe $|CK|$ avem măs $(\widehat{FBE}) = 180°$ (vezi fig. III.15). Deci F, B și E sînt coliniare.

14. *Soluția I.* Din $\Delta MFA \equiv \Delta NAB$ (cazul ULU) rezultă $|AN| \equiv |BN| \equiv |BP| \equiv |PC| \equiv \ldots$ Din $\Delta AMN \equiv \Delta BNP \equiv \Delta CPQ \ldots$ (LUL) rezultă $|MN| \equiv |NP| \equiv |PQ| \equiv |QR|$. Laturile hexagonului sînt congruente. Se calculează măsurile unghiurilor și se obține că au cîte 120°. Deci hexagonul $MNPQRS$ este regulat.

Soluția II. Fie O centrul hexagonului; măs $(\widehat{AOB}) = 360°/6 = 60°$. Prin rotația $R(O, 60°)$ vîrful A trece în

Scanned with OKEN Scanner

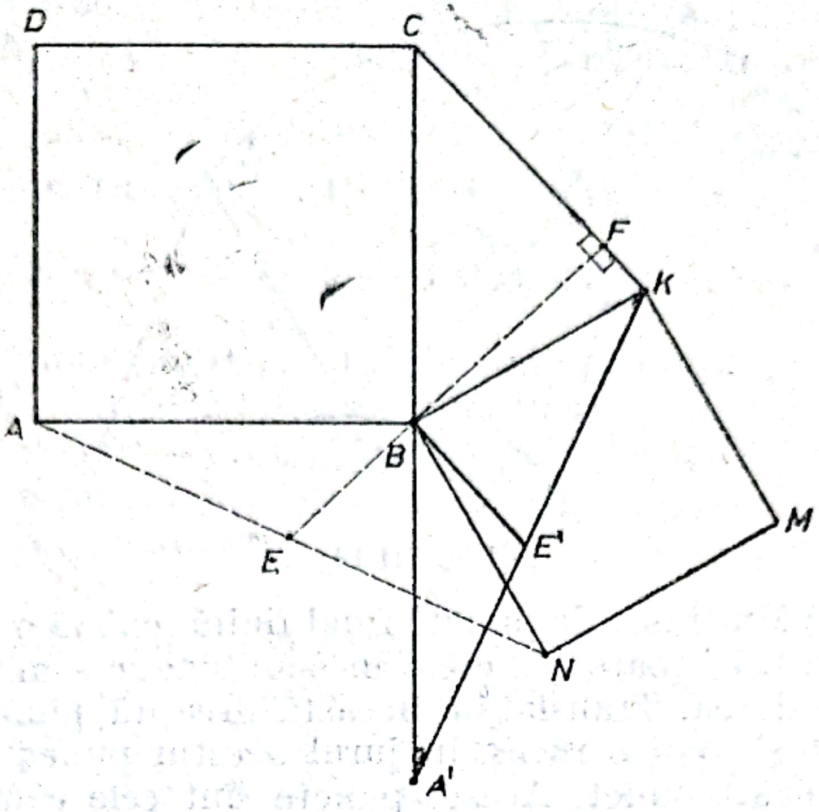


Fig. III.15

B, B în C ş.a.m.d.(vezi fig. III.16). Deoarece $1 \equiv \hat{3}$ semidreapta $|AN$ trece în $|BP$. Din $\hat{2} \equiv \hat{4}$ semidreapta

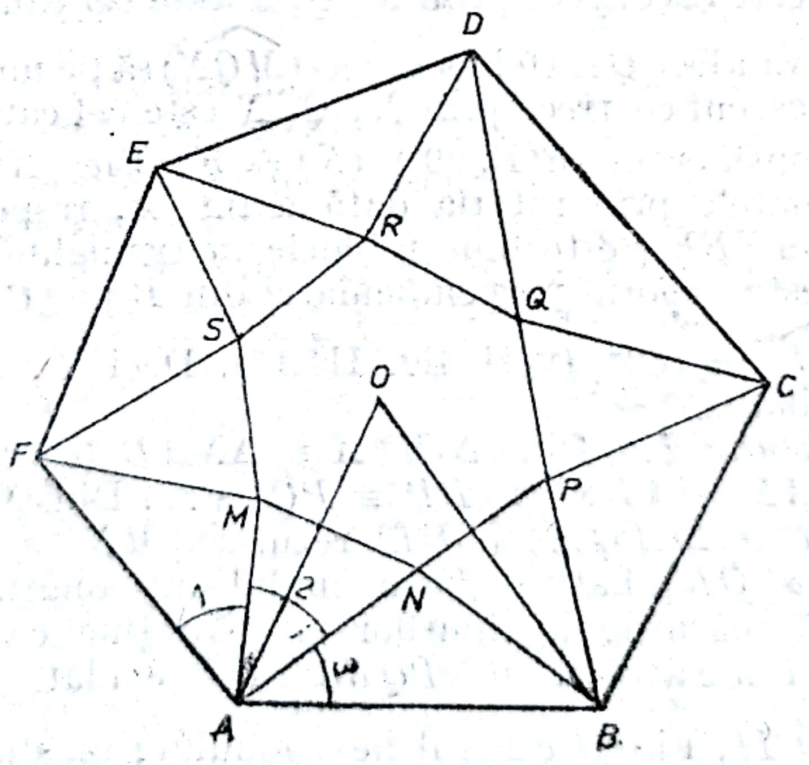


Fig. III.16

Scanned with OKEN Scanner

$|BN$ devine $|CP$, deci N trece în P ş.a.m.d. Rezultă că hexagonul este regulat. Avem aici un exemplu concludent care ilustrează simplitatea metodei de demonstraţie pe baza transformărilor geometrice.

15. *Cazul I.* Triunghiul dat ABC este ascuţitunghic sau obtuzunghic. Din mijloacele M şi N ale laturilor $|AC|$, respectiv, $|BC|$ ducem perpendicularele $|MM'|$, respectiv, $|NN'|$ pe latura $|AB|$. Tăiem triunghiul ABC după MM' şi NN' şi rotim triunghiurile AMM' şi BNN' cu cîte 180° în jurul punctelor M, respectiv, N; obţinem astfel dreptunghiul căutat (vezi fig. III. 17, a).

Cazul II. Triunghiul ABC este dreptunghic. În acest caz putem tăia triunghiul numai în două părţi prin mijlocul ipotenuzei şi obţinem dreptunghiul căutat; $NN' \| AC$ (vezi fig. III.17, b).

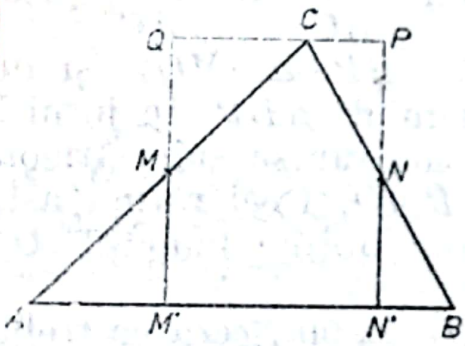


Fig. III.17, a

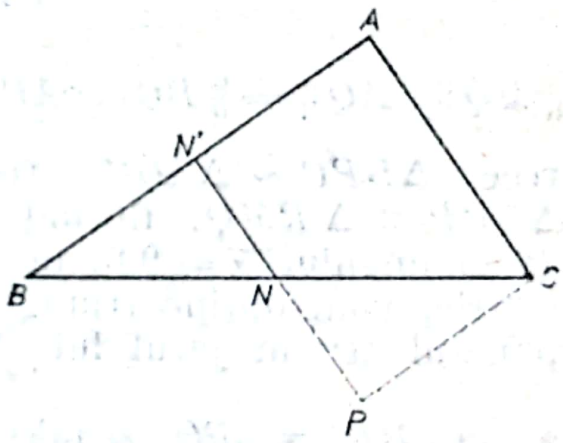


Fig. III.17, b

16. Rotim punctul B în jurul lui R cu 90°, în sens contrar sensului trigonometric, şi fie M punctul obţinut. Avem măs $(\widehat{ARB}) = 180° - 30° = 150°$, de unde rezultă că măs $(\widehat{ARM}) = 150° - 90° = 60°$ (vezi fig. III.18). Din $|AR| \equiv |RM|$ rezultă că triunghiul ARM este echilateral. De aici avem măs $(\widehat{QAM})$ = măs $(\widehat{QAR})$ − − 60° = măs $(\widehat{CAB})$ + 60° − 60° = măs $(\widehat{CAB})$. Dacă vom arăta că $\Delta AQM \sim \Delta ACB$ va rezulta că avem măs $(\widehat{AMQ})$ = măs $(\widehat{ABC})$, deci măs $(\widehat{RMQ})$ = măs $(\widehat{RMA})$ + + măs $(\widehat{AMQ})$ = 60° + măs $(\widehat{ABC})$ = măs (RBP) şi

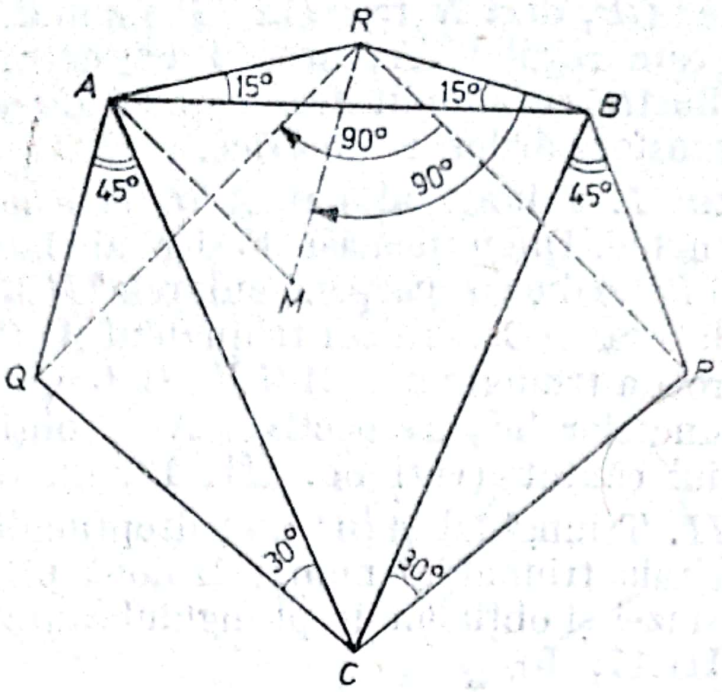


Fig. III.18

$\|MQ\|/\|AQ\| = \|BC\|/\|AC\|$. Din $\frac{\|BP\|}{\|AQ\|} = \frac{\|BC\|}{\|AC\|}$ (deoarece $\Delta BPC \sim \Delta AQC$) rezultă $|BP| \equiv |MQ|$ și deci $\Delta RBP \equiv \Delta RMQ$. Rotind triunghiul RBP în jurul lui R cu unghiul $\alpha = 90°$, în sens contrar sensului trigonometric, vom obține triunghiul RMQ. Deci rotind astfel punctul P în jurul lui R vom obține punctul Q și avem $|PR| \equiv |RQ|$ și măs $(\widehat{PRQ}) = 90°$, ceea ce trebuia demonstrat.

17. a) Deoarece măs $(\widehat{BAD})$ = măs $(\widehat{B'AD'}) = 90°$ rezultă că triunghiul isoscel BAB', rotit cu 90° în jurul lui A, se suprapune peste triunghiul DAD'. Deci dreapta DD' rezultă din rotirea cu $\alpha = 90°$ a dreptei BB' (vezi fig. III.19). Rezultă că $|BB'| \equiv |DD'|$. Notăm $\{M\} = BB' \cap DD'$. Punctul M se află pe cercul cu diametrul $|BD|$, adică pe cercul circumscris pătratului $ABCD$, cerc care este locul geometric al lui M cînd unghiul α variază.

b) măs $(\widehat{B'MD}) = 90°$. Rezultă că punctul M aparține și cercului circumscris pătratului $AB'C'D'$. Se deduce că măs $(\widehat{CMB})$ = măs $(\widehat{C'MB'}) = 45°$, deci

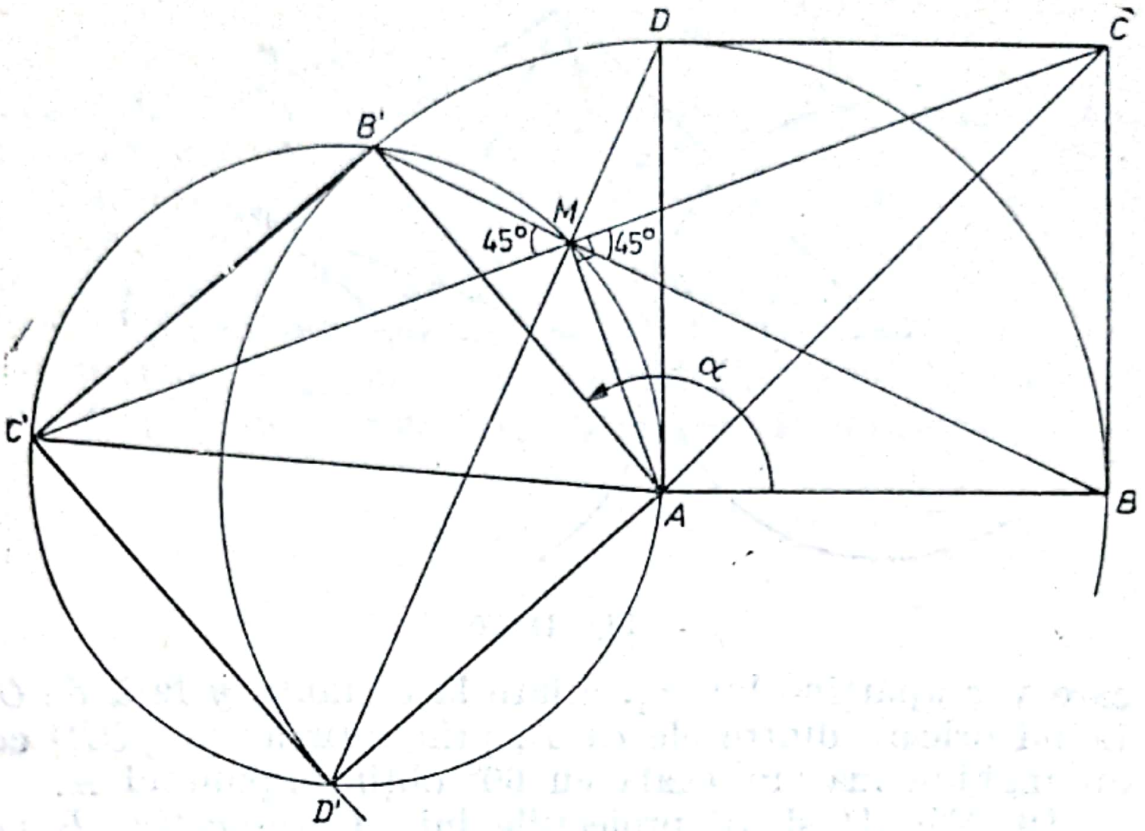


Fig. III.19

măs $(\widehat{CMC'}) = 45° + 90° + 45° = 180°$, adică dreapta CC' trece prin punctul M care este punctul de concurenţă al dreptelor BB' şi DD'.

c) măs $(\widehat{CMA}) = 90°$, deci în triunghiul isoscel ACC', $|AM|$ este înălţime, deci şi mediană. Rezultă că M este mijlocul lui $|CC'|$.

18. Considerăm $x \leqslant y \leqslant z$ şi construim triunghiul în aceste condiţii. Punctul C este un punct arbitrar situat la distanţa z faţă de O. Punctul A va aparţine cercului $\mathscr{C}$ cu centrul în O şi de rază x. Considerăm că parcurgerea triunghiului în ordinea ABC se face în sens invers sensului trigonometric şi atunci punctul B va aparţine cercului $\mathscr{C}_1$ obţinut prin rotirea lui O cu 60° în jurul lui C, în sens invers trigonometric (vezi fig. III.20). Dar $|OB| = y$, deci construcţia nu este posibilă dacă $\mathscr{C}_1$ nu conţine puncte la distanţa y faţă de O. Distanţa $|OO_1|$ este egală cu z. Rezultă că triunghiul va există numai în condiţia în care avem : $z - x \leqslant y \leqslant z + x$ sau $z \leqslant x + y$ şi $y \leqslant z + x$, sau $x \leqslant y + z$ căci $x \leqslant y$. Invers, dacă $z \leqslant x + y$, $y \leqslant z + x$, $x \leqslant y + z$, va exista un punct sau două

Scanned with OKEN Scanner

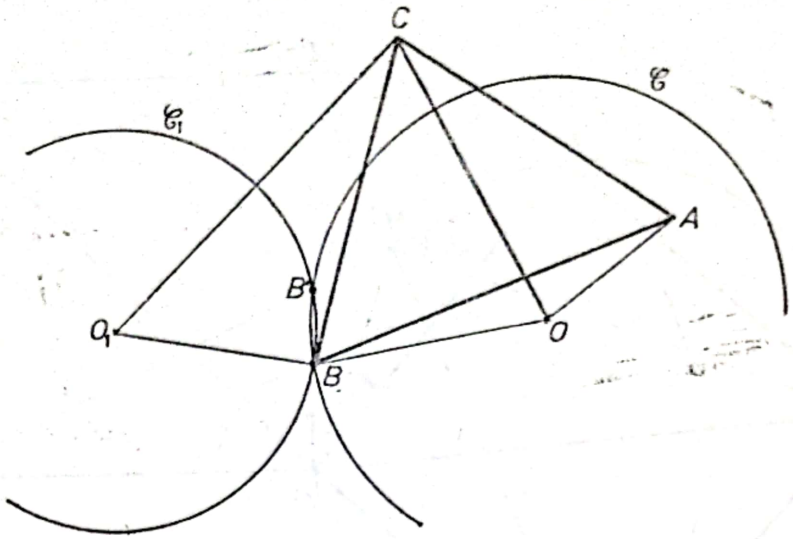


Fig. III.20

care vor aparține lui $\mathscr{C}_1$, aflate la distanța y față de O. Luînd oricare dintre ele ca B, prin rotirea lui $|CB|$ cu un unghi de măsură egală cu 60° obținem punctul A.

19. Fie A' și B' proiecțiile lui A, respectiv, B pe dreptele d_1 și d_2 ($|OA'| \equiv |OB'|$). Pe prelungirea lui $|BB'|$ considerăm segmentul congruent cu $|AA'|$. Deoarece am luat $|OA'| \equiv |OB'|$ și $|AA'| \equiv |BB'|$ iar

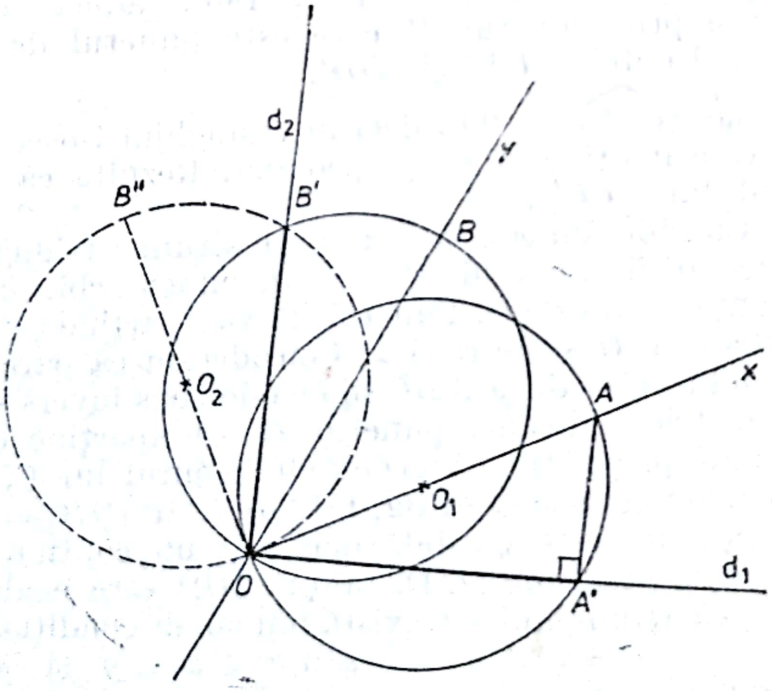


Fig. 21. III

măs $(\widehat{OA'A}) =$ măs $(\widehat{OB'B}) = 90°$ (prin ipoteză), rezultă că $\Delta OAA' \equiv \Delta OB'B''$. Observăm că cele două triunghiuri se obţin unul din celălalt printr-o rotaţie $R(O, 90°)$ (vezi fig. III.21). Punctul A' se află pe cercul de diametru $|OA|$, iar B' pe cercul de diametru $|OB|$. Deci obţinem punctul B' rotind cu 90° cercul de diametru $|OA|$ în jurul punctului O. Dreptele OA' şi OB' sînt dreptele d_1, respectiv, d_2 pe care le căutăm.

Scanned with OKEN Scanner

1. SIMETRIA

Definiția 1.1. Fie *planul* E^2 și o dreaptă $d \subset E^2$. Se numește *simetrie* (a planului E^2) *față de dreapta* d, o transformare $S_d : E^2 \to E^2$ ce conservă punctele $M \in d$ și asociază oricărui punct $M \notin d$ al planului, punctul $M' \in E^2$ astfel încît dreapta d este mediatoarea segmentului $|MM'|$; dreapta d se numește axă de simetrie iar punctul M' simetricul punctului M prin transformarea S_d; îl vom nota $M' \quad S_d(M)$.

Enunțăm cîteva proprietăți ale simetriei.

1. Simetria S_d transformă drepte în drepte.
2. Simetria S_d păstrează unghiurile.
3. Simetria S_d transformă un poligon într-un poligon congruent cu cel dat și un cerc într-un cerc congruent.
4. Simetria S_d inversează orientarea figurilor.
5. Dacă axele de simetrie d_1 și d_2 sînt paralele atunci

$$S_{d_1} \circ S_{d_2} = T \text{ (translație).}$$

6. Dacă axele de simetrie d_1 și d_2 sînt perpendiculare și $d_1 \cap d_2 = \{0\}$, atunci

$$S_{d_1} \circ S_{d_2} = S_{d_2} \circ S_{d_1} = S_0 \text{ (simetria față de punctul } O).$$

Teorema 1.1. *Orice simetrie plană* S_d *față de o dreaptă* d *este o izometrie.*

Teorema 1.2. *Un punct* M *al planului este invariat de o simetrie* S_d *dacă și numai dacă* $M \in d$.

Teorema 1.3. *O dreaptă* Δ *este invariată de o simetrie* S_d *dacă și numai dacă* $\Delta \perp d$ *sau* $\Delta = d$.

Teorema 1.4. *Un cerc* $\mathcal{C}(O, r)$ *este invariat de o simetrie* S_d *dacă și numai dacă* $O \in d$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.2. Fie E^3 spațiul euclidian tridimensional și $O \subset E^3$ un punct. Se numește *simetrie* (a spațiului E^3) *față de punctul* O, o transformare $S_0 : E^3 \to E^3$ ce conservă punctul O și asociază oricărui punct $M \neq O$ din E^3 punctul M', astfel încît O să fie mijlocul segmentului $|MM'|$; punctul O se numește centru de simetrie, iar M' simetricul lui M prin transformarea S_0; îl notăm $M' = S_0(M)$.

Definiția 1.3. Fie E^3 spațiul euclidian tridimensional și $d \subset E^3$ o dreaptă. Se numește *simetrie* (a spațiului E^3) *de axă* d, o transformare $S_d : E^3 \to E^3$ ce conservă punctele $M \in d$ și asociază oricărui punct $M \in E^3$, nesituat pe d, punctul M' astfel încît d să fie mediatoarea segmentului $|MM'|$.

Teorema 1.5. *Fie S_d o simetrie a spațiului euclidian tridimensional E^3. Orice plan π este invariat de simetria S_d dacă și numai dacă este perpendicular pe axa de simetrie* d. *Orice sferă este invariată de simetria S_d dacă și numai dacă are centrul situat pe axa de simetrie* d.

Definiția 1.4. Fie E^3 spațiul euclidian tridimensional și $\pi \subset E^3$ un plan. Se numește *simetrie* (a spațiului E^3) *față de planul* π, o transformare $S_\pi : E^3 \to E^3$ ce conservă punctele planului π și asociază oricărui punct $M \in E^3$, nesituat în π, punctul M' astfel încît planul π este plan mediator al segmentului $|MM'|$.

Observație. Recomandăm să se formuleze proprietăți și teoreme referitoare la simetrii (ale spațiului E^3) în raport cu puncte, drepte sau plane deoarece considerăm aceasta un exercițiu util și accesibil cititorului.

Rezolvarea problemelor de geometrie prin metoda simetriei constă în construirea simetricelor unor elemente date spre a reduce problema la una cunoscută care implică rezolvarea problemei inițiale. După ce s-a sesizat că problema se rezolvă folosind metoda simetriei, este necesar să se stabilească centrul, axa sau planul de simetrie față de care se vor determina simetricele elementelor din problema dată cu care se creează o nouă problemă mai simplă sau chiar una cunoscută ce atrage după sine rezolvarea problemei inițiale.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie M și N două puncte distincte în interiorul unghiului AOB. Să se găsească pe laturile $|OA$ și $|OB$ poziția punctelor Q și, respectiv, P astfel încît linia frîntă $MPQN$ să fie de lungime minimă.

Construcție. Considerăm problema rezolvată și construim figura geometrică cu datele problemei. Căutăm să înlocuim elemente ale problemei date cu altele noi astfel încît să se păstreze distanțele de care avem nevoie. Pentru a găsi punctele P și Q, observăm că trebuie să construim punctul M', simetricul lui M față de $|OB$, și punctul N', simetricul lui N față de $|OA$. Constatăm că am redus problema inițială la una nouă în care unind punctele M' și N' descoperim punctele care îndeplinesc condițiile impuse de problema dată (vezi fig. IV.1). O formulăm astfel :

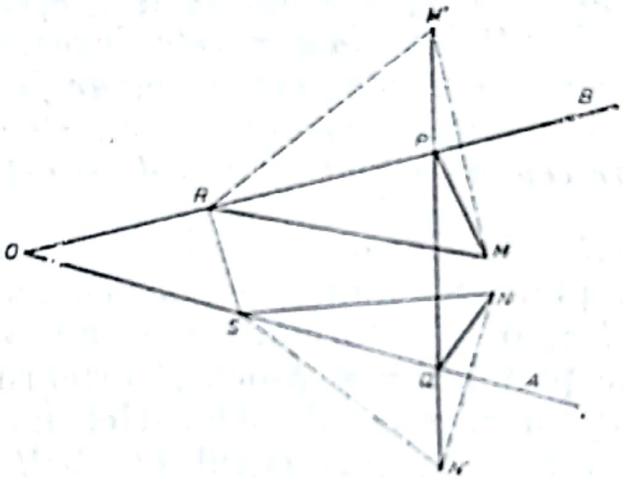


Fig. IV.1

Să se găsească drumul cel mai scurt dintre punctele M' și N' care să intersecteze laturile unghiului AOB.

Soluție. Drumul cel mai scurt dintre două puncte este linia dreaptă ce le unește. Deci, unind punctele M' și N' găsim poziția punctelor P și Q acolo unde dreapta $M'N'$ intersectează laturile unghiului dat.

Demonstrație. $|MP| \equiv |M'P|$, fiind segmente simetrice față de axa $|OB$; $|PQ| \equiv |PQ|$; $|QN| \equiv |QN'|$, fiind segmente simetrice față de axa $|OA$. Rezultă că

$$\|MP\| + \|PQ\| + \|QN\| = \|M'P\| + \|PQ\| + \|QN'\| = \|M'N'\|.$$

Deci linia frîntă $MPQN$ este cea mai scurtă. Presupunem că mai există și alte puncte care îndeplinesc

condiția cerută de problemă. Fie acestea $R \in |OB$ și $S \in |OA$. Datorită simetriei putem scrie:

$$\|MR\| + \|RS\| + \|SN\| = \|M'R\| + \|RS\| + \|SN'\|.$$

Dar în patrulaterul $M'N'RS$ segmentul $|M'N'|$ este mai scurt decît linia frîntă cu aceleași capete $M'RSN'$. Deci $\|M'N'\| < \|M'RSN'\|$ adică

$$\|MP\| + \|PQ\| + \|QN\| < \|MR\| + \|RS\| + \|SN\|$$

și deci punctele ce îndeplinesc condiția cerută sînt punctele $P \in |OB$ și $Q \in |OA$.

2. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că distanța dintre două puncte este păstrată prin simetria S_d definită de o axă d.

Soluția I. Fie M și M' două puncte oarecare ale planului π, iar dreapta d o axă de simetrie ($M \notin$ d și $M' \notin$ d). Fie $M_1 = S_d(M)$, $M_1' = S_d(M')$, iar O un punct ce aparține axei de simetrie d. Observăm că se formează triunghiurile MOM' și M_1OM_1' în care, din motive de simetrie, avem,

$$|MO| \equiv |M_1O|, \quad |M'O| \equiv |M_1'O| \text{ și } \widehat{MOM'} \equiv \widehat{M_1OM_1'}.$$

Rezultă că $\Delta MOM' \equiv \Delta M_1OM_1'$ (L.U.L.) (vezi fig. IV.2). Din această congruență rezultă că $d(M, M') \equiv d(M_1, M_1')$.

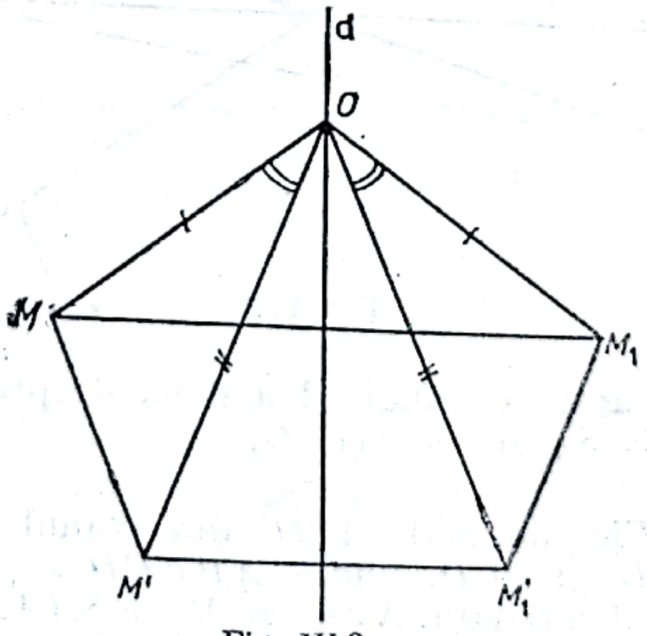


Fig. IV.2

Soluția II. Considerăm un sistem de axe rectangulare avînd dreapta d drept axă xx'. Fie $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ două puncte oarecare din plan, iar punctele $M_1(x, -y)$ și $M_1'(x', -y')$ transformatele lor prin simetria S. Se verifică imediat că $|MM'| \equiv |M_1M_1'|$.

2. Să se arate că simetria S_O în raport cu un punct O, transformă o dreaptă $d \in \pi$ într-o dreaptă d_1 paralelă cu d.

Soluție. Fie trei puncte coliniare A, B și C care aparțin dreptei d. Deoarece $S_O : \pi \to \pi$ este o izometrie, punctele coliniare A, B și C se transformă prin simetria S_O în punctele coliniare $A' = S(A)$, $B' = S(B)$ și $C' = S(C)$ (vezi fig. IV. 3). Patrulaterele $ABA'B'$ și $ACA'C'$ sînt paralelograme deoarece diagonalele se înjumătățesc. Din motive de simetrie avem $|OA| \equiv |OA'|$, $|OB| \equiv |OB'|$ și $|OC| \equiv |OC'|$. Rezultă că $A'C' \| AC$ și $A'B' \| AC$, deci $A'B'$ și $A'C'$ sînt paralele cu d și atunci d_1, care conține punctele A', B', C', este paralelă cu d.

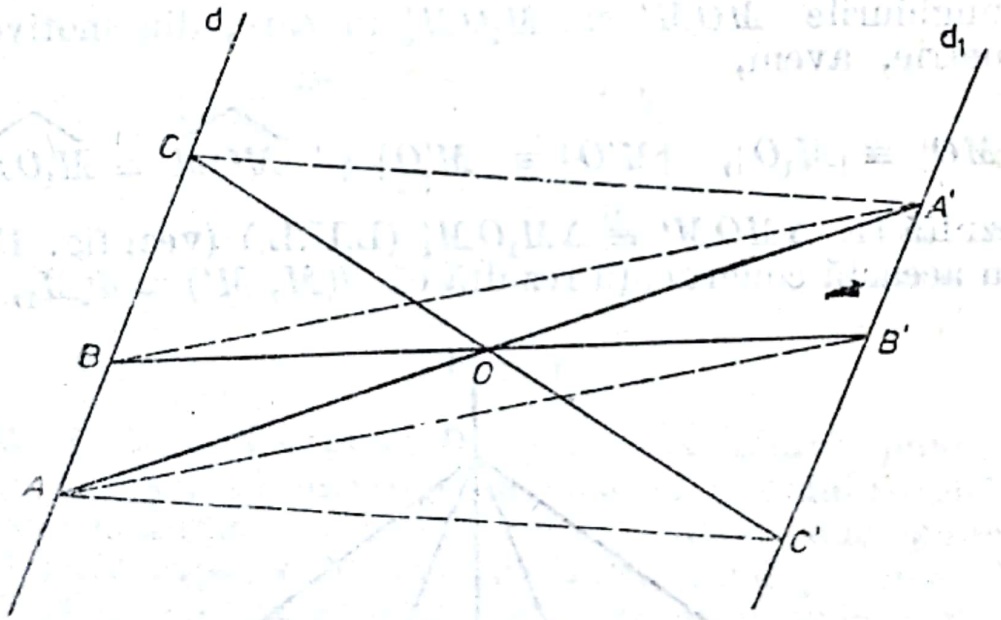


Fig. IV.3

3. Să se arate că unghiul a două drepte se conservă prin simetria S_O de centru O.

Soluție. Fie unghiul $\widehat{AMC}$ din planul π format de dreptele AB și CD, unde $AB \cap CD = \{M\}$ și simetria S_O de centru O dată. Avem $A'M' = S_O(AM)$ și $C'M' = S_O(CM)$, deci $|AM| \equiv |A'M'|$ și $|MC| \equiv |M'C'|$. Re-

zultă că $|AC| \equiv |A'C'|$ și $\Delta AMC \equiv \Delta A'M'C'$ (cazul L.L.L.). Atunci $\widehat{AMC} \equiv \widehat{A'M'C'}$ (vezi fig. IV. 4).

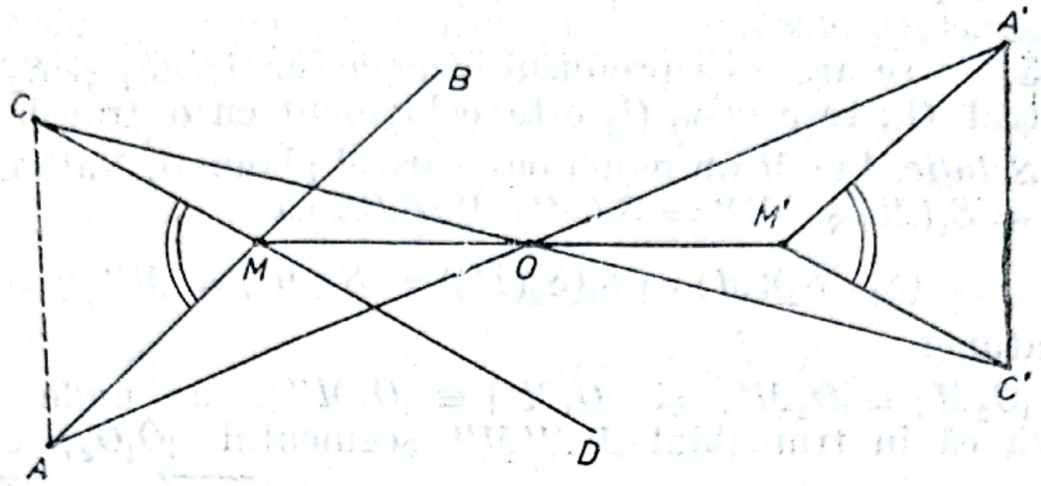


Fig. IV.4

4. Să se arate că simetria în raport cu un punct O transformă un plan π într-un plan paralel.

Soluție. Fie în planul π trei puncte A, B și C necoliniare. Transformatele lor prin simetria S_O, notate $A' = S_O(A)$, $B' = S_O(B)$ și $C' = S_O(C)$, vor determina un plan π'. Din problema 2 rezultă că segmentele $|A'B'| \parallel |AB|$ și $|A'C'| \parallel |AC|$, ceea ce implică $\pi \parallel \pi'$ (vezi fig. IV.5).

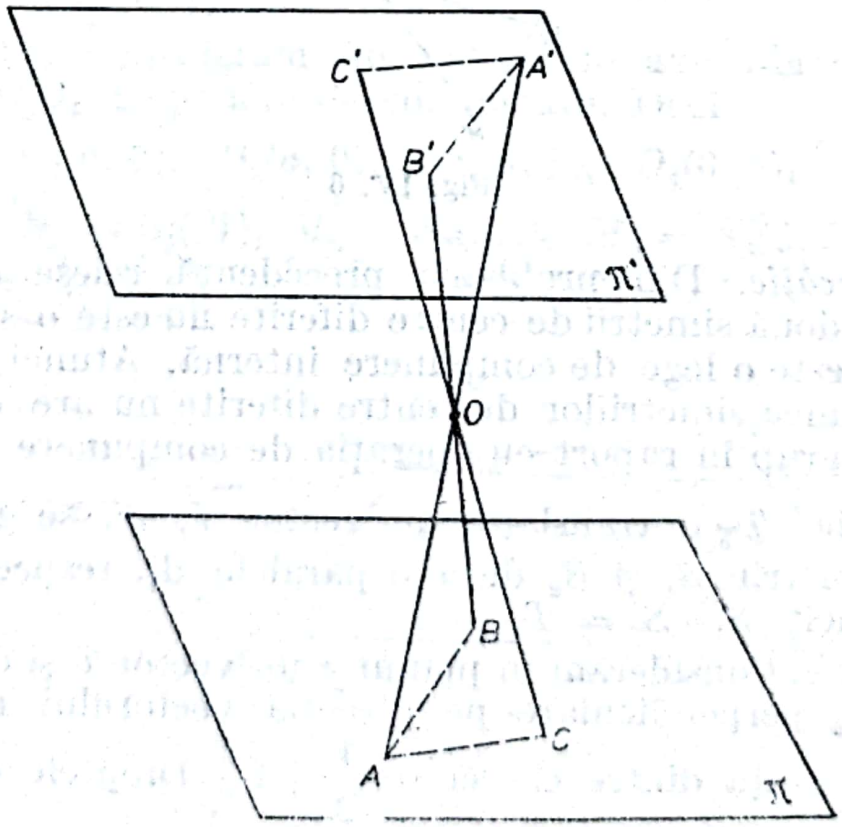


Fig. IV. 5

Observație. Dreptele sau planele care trec prin centrul de simetrie sînt invariate de simetria dată. Dreptele sau planele perpendiculare pe axa de simetrie sînt invariate de simetria dată.

5. Să se arate că produsul a două simetrii S_1 și S_2 de centrul O_1, respectiv, O_2 este echivalent cu o translație.

Soluție. Fie M un punct oarecare al planului. Notăm cu $M' = S_2(M)$ și $M'' = S_1(M')$. Rezultă că

$$(S_1 \circ S_2)(M) = S_1(S_2(M)) = S_1(M') = M''$$

și atunci

$|O_2M| \equiv |O_2M'|$ și $|O_1M'| \equiv |O_1M''|$, de unde rezultă că în triunghiul $MM'M''$ segmentul $|O_1O_2|$ este linie mijlocie (vezi fig. IV.6). Rezultă că $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Deci se poate obține M'' direct din M dacă se aplică punctului M translația de vector $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

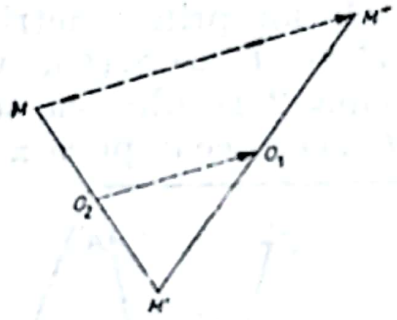


Fig. IV. 6

Observație. Din problema precedentă reiese că produsul a două simetrii de centre diferite nu este o simetrie, deci nu este o lege de compunere internă. Atunci rezultă că mulțimea simetriilor de centre diferite nu are o structură de grup în raport cu operația de compunere.

6. Fie $T_{\vec{v}}$ o translație de vector $\vec{v}$. Să se găsească două simetrii S_1 și S_2 de axe paralele d_1, respectiv, d_2, astfel încît $S_1 \circ S_2 = T_{\vec{v}}$.

Soluție. Considerăm în planul π un vector $\vec{v}$ și dreptele d_1 și d_2 perpendiculare pe direcția vectorului $\vec{v}$, astfel încît distanța dintre ele să fie $\frac{1}{2}\|\vec{v}\|$. Dreptele d_1 și d_2 definesc simetriile căutate astfel că $S_1 \circ S_2 = T_{\vec{v}}$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Se dă paralelogramul $ABCD$. Studiaţi compunerea simetriilor

$$T_1 = S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A \quad \text{şi} \quad T_2 = S_D \circ S_B \circ S_C \circ S_A.$$

Soluţie. În baza proprietăţii de asociativitate a compunerii simetriilor obţinem

$$T_1 = (S_D \circ S_C) \circ (S_B \circ S_A) = T_{2\overrightarrow{CD}} \circ T_{2\overrightarrow{AB}} =$$
$$= T_{2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})} = T_0 = I.$$

Deci T_1 este transformarea identică.

$$T_2 = (S_D \circ S_B) \circ (S_C \circ S_A) = T_{2\overrightarrow{DB}} \circ T_{2\overrightarrow{AC}} =$$
$$= T_{2(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})} = T_{2\overrightarrow{AD}},$$

unde

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} =$$
$$= 2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = 2\overrightarrow{AD}.$$

Deci T_2 este o translaţie.

8. Se dă paralelogramul $O_1O_2O_3O_4$ şi simetriile S_1, S_2, S_3 şi S_4 de centru, respectiv, O_1, O_2, O_3 şi O_4. Să se arate că $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = 1$.

Soluţie. Considerăm un sistem de axe oblice avînd O_1O_2 şi O_1O_4 drept axe de coordonate. Deci

$$O_1(0, 0), \quad O_2(a, 0), \quad O_3(a, b), \quad O_4(0, b).$$

Notăm $M_1 = S_1(M)$, $M_2 = S_2(M_1)$, $M_3 = S_3(M_2)$, $M_4 = S_4(M_3)$ (vezi fig. IV.7). Deoarece $M_4 = M$ rezultă $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = 1$.

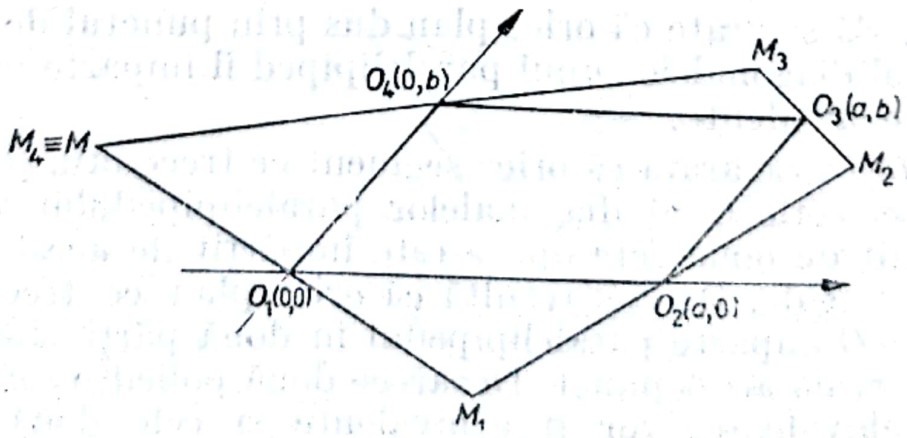


Fig. IV.7

9. Se dă triunghiul $O_1O_2O_3$ și simetriile S_1, S_2 și S_3 de centru, respectiv, O_1, O_2 și O_3. Să se arate că

$$S_1 \circ S_2 \circ S_3 = S_3 \circ S_2 \circ S_1.$$

Soluție. Considerăm un sistem de axe oblice avînd ca axe de coordonate dreptele O_1O_2 și O_1O_3 (vezi fig. IV.8).

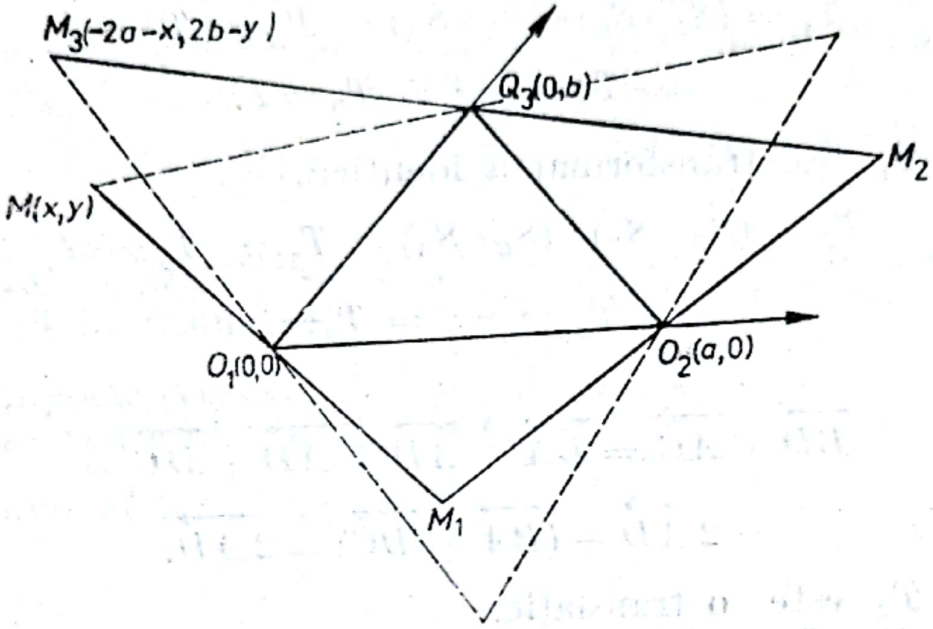


Fig. IV.8

Avem $O_1(0,0)$, $O_2(a, 0)$, $O_3(0, b)$. Fie punctul M_1 transformatul punctului $M(x, y)$ în raport cu S_1, adică $M_1 = S_1(M)$, $M_2 = S_2(M_1)$ și $M_3 = S_3(M_2)$. Ținînd seama de ecuațiile simetriilor respective avem $M_3(-2a - x, 2b - y)$. Deci $M(x, y)$ prin $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ se transformă în $M_3\,(-2a - x, 2b - y)$. Calculînd în mod analog transformatele punctului M prin $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ se găsește, de asemenea, $(-2a - x, 2b - y)$, care este tot M_3. Deci $S_1 \circ S_2 \circ S_3 = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

10. Să se arate că orice plan dus prin punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelipiped îl împarte în două părți echivalente.

Soluție. Se arată că orice segment ce trece prin punctul de intersecție O al diagonalelor paralelipipedului și este mărginit de două fețe opuse este împărțit de acest punct în părți egale. De aici rezultă că orice plan ce trece prin punctul O împarte paralelipipedul în două părți simetrice în raport cu acest punct. Deoarece două poliedre simetrice sînt echivalente, vor fi echivalente și cele două părți ale paralelipipedului.

Scanned with OKEN Scanner

11. Să se arate că toate axele de simetrie ale unui poligon sînt concurente.

Soluție. Observăm că axele de simetrie sînt în număr finit și oricare două axe de simetrie trebuie să se intersecteze căci altfel figura ar fi nemărginită. Fie d_1 și d_2 două axe de simetrie astfel încît unghiul $(\widehat{d_1, d_2})$ să fie minim. Rezultă că simetrica lui d_1 față de d_2 este o axă de simetrie. Notăm această axă cu d_3. Analog, fie d_4 simetrica lui d_2 față de d_3 etc. Atunci $(\widehat{d_1, d_2}) \equiv (\widehat{d_2, d_3}) \ldots (\widehat{d_n, d_1})$ măsura lor comună fiind unghiul $\alpha = 180°/n$.

Să notăm cu O punctul de intersecție al axelor de simetrie d_i. Dacă există o axă d' și $O \notin d'$, atunci putem duce prin O dreptele $d'' \parallel d'$. Rezultă că d'' cade între d_i și d_{i+1} și deci măs $(\widehat{d_i, d''}) < 180°/n$, ceea ce este absurd. Deci toate axele de simetrie trec prin același punct și astfel ele sînt concurente.

12. Fie măs $(\widehat{xOy}) < 45°$ și punctul $A \in Ox$ fixat. Să se determine pozițiile punctelor M și N, ce aparțin dreptelor Oy, respectiv, Ox astfel încît $\|AM\| + \|MN\|$ să fie minimă.

Soluție. Fie Ox' și N' simetricele lui Ox și N față de Oy (vezi fig. IV.9). Rezultă că $\|AM\| + \|MN\| = \|AM\| +$

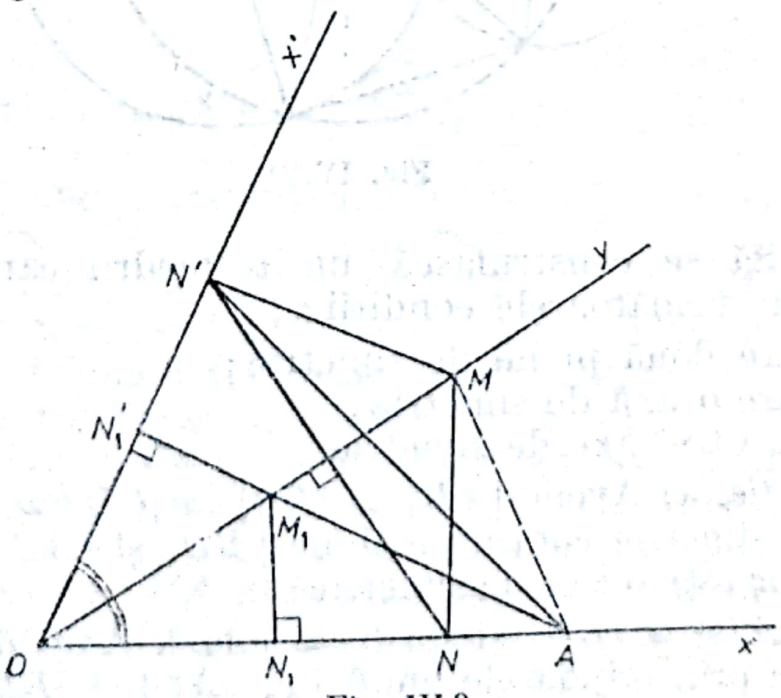


Fig. IV.9

$+\| MN' \| \geqslant AN_1'$ ($|AN_1| \perp Ox'$ în N_1'). Fie $\{M_1\} = AN_1' \cap Oy$. Rezultă că $\| AM \| + \| MN \| \geqslant \| AM_1 \| + \| M_1N_1' \|$ pentru orice $M \in Oy$, $N \in Ox$. Construim punctul N_1, simetricul lui N_1' față de Oy, care împreună cu punctul M_1 reprezintă punctele căutate ($N_1 \in Ox$).

13. Se consideră două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ care nu sînt concentrice. Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor $\mathscr{C}(O, r)$ care intersectează fiecare din cele două cercuri în cîte două puncte diametral opuse. În ce condiții acest loc geometric este axa radicală a celor două cercuri date?

Soluție. Din triunghiurile dreptunghice A_1O_1O și A_2O_2O rezultă că $\| OO_1 \|^2 - \| OO_2 \|^2 = r_2^2 - r_1^2$. Atunci centrele O vor descrie o dreaptă perpendiculară pe $|O_1O_2|$ care este simetrica axei radicale a cercurilor $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ și coincide cu axa radicală, cînd $r_1 \equiv r_2$ (vezi fig. IV.10).

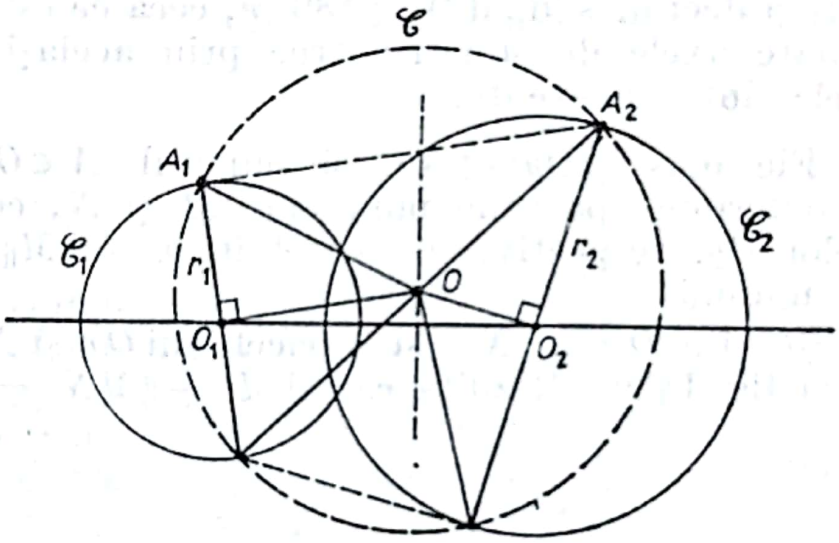


Fig. IV.10

14. Să se construiască un tetraedru care satisface una din următoarele condiții:

a) are două plane de simetrie;
b) are o axă de simetrie;
c) are trei axe de simetrie.

Soluție. a) Avem $|AB| \equiv |BC| \equiv |CD| \equiv |DA|$. Planele de simetrie conțin muchiile $|BD|$ și $|AC|$, iar intersecția lor este o axă de simetrie;

b) $|AB| \equiv |DC|$ și $|BC| \equiv |AD|$. Axa de simetrie va trece prin mijloacele muchiilor $|AC|$ și $|BD|$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $|AB| \equiv |DC|$, $|BC| \equiv |AD|$ și $|AC| \equiv |BD|$. Axele de simetrie vor trece prin mijloacele muchiilor opuse.

15. Să se arate că simetricele ortocentrului unui triunghi față de mijloacele laturilor se găsesc pe cercul circumscris triunghiului și sînt diametral opuse vîrfurilor.

Soluție. Fie punctul A'' simetricul ortocentrului H față de mijlocul A' al laturii $|BC|$ (vezi fig. IV. 11).

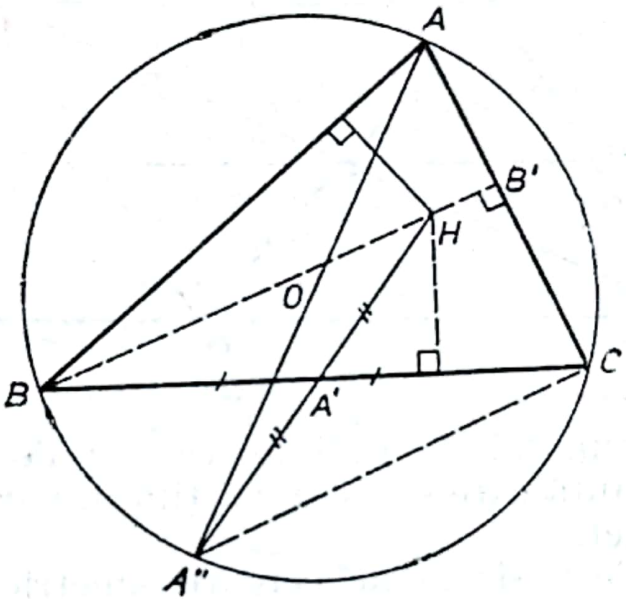


Fig. IV.11

Din $\Delta BB'C$ avem că măs $(\widehat{HBC})$ + măs $(\widehat{BCB'})$ = 90°, (măs $(\widehat{BB'C})$=90°). Rezultă că, măs $(\widehat{ACA''})$=măs $(\widehat{BCB'})$+ + măs $(\widehat{A'CA''})$ = măs $(\widehat{BCB'})$ + măs $(\widehat{HBC})$ = = 90°. Prin urmare $|AA''|$ este un diametru în cercul circumscris triunghiului ABC, iar punctul A'' se află pe cerc și este diametrial opus lui A.

16. Fie cercul fix $\mathscr{C}$ (O, r), un punct fix A în planul său și un diametru variabil $|MN|$ al cercului. Prin punctele M și N se construiesc dreptele $d \| OA$, respectiv, $d' \| OA$. Dreapta MA intersectează dreapta d' în punctul M', iar dreapta NA pe d în punctul N'. Să se arate că:

a) mijlocul segmentului $|M'N'|$ este fix;

b) să se determine locul geometric descris de punctele M' și N'.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. În triunghiurile $NM'M$ și MNN' segmentul $|OA|$ este linie mijlocie. Rezultă că $MNM'N'$ este paralelogram. Avem că $|MN| \equiv |M'N'|$ iar $OA \cap M'N' = \{O'\}$. Deci punctul O' este mijlocul lui $|M'N'|$. Deoarece $|OA| \equiv |AO'|$ rezultă că puntul O' este fix. Punctele M' și N' sînt simetricele punctelor M, respectiv, N în raport cu punctul A și ele vor descrie cercul cu centrul în O', simetric cercului dat și congruent cu acesta (vezi fig. IV.12).

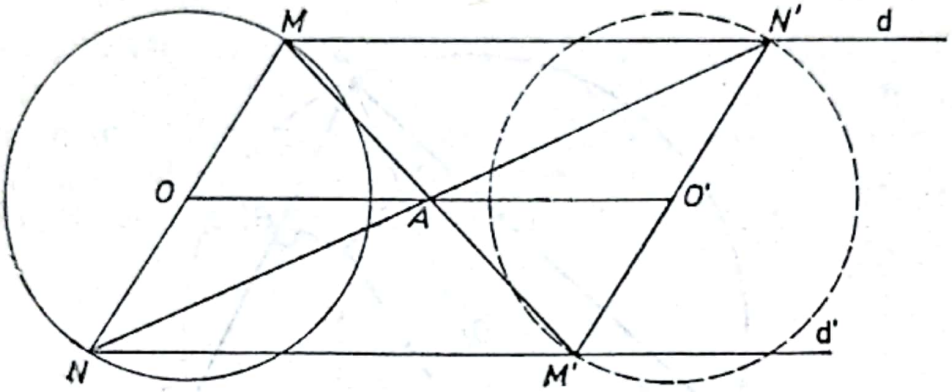


Fig. IV.12

17. Prin punctul A de intersecție a două cercuri să se ducă o secantă care să fie împărțită în părți congruente de acest punct.

Soluție. Fie $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ două cercuri. Simetricul unui punct C de pe cercul $\mathscr{C}_1$ față de punctul A se află pe cercul $\mathscr{C}_2$. Trebuie găsit locul pe cercul $\mathscr{C}_1$ unde trebuie luat punctul C pentru a îndeplini condiția inițială (vezi fig. IV. 13).

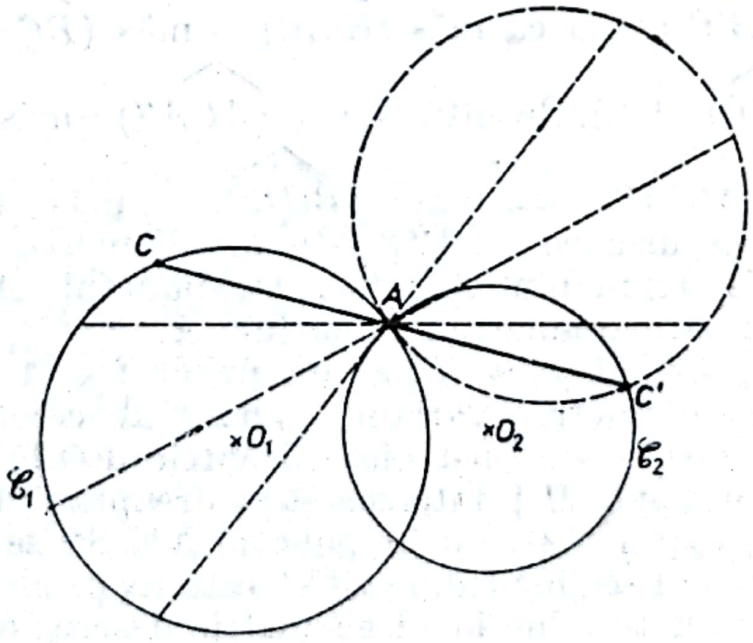


Fig. IV.13

Considerînd simetricele tuturor punctelor de pe cercul $\mathscr{C}_1$ față de punctul A, obținem un cerc care intersectează cercul $\mathscr{C}_2$ în C' și care reprezintă soluția cerută.

18. Să se arate că dreapta care trece prin centrele a două fețe opuse ale unui octaedru regulat este perpendiculară pe planele acestor fețe.

Soluție. Fie A', B' și C' vîrfurile unei fețe a octaedrului regulat. Fie M' centrul feței $A'B'C'$, iar punctul O centrul de simetrie al octaedrului. Considerăm piramida regulată $OA'B'C'$ a cărei înălțime din O va trece prin M'. Un raționament analog facem și pentru fața opusă $A''B''C''$, ținînd seama că $(A'B'C') \parallel (A''B''C'')$, de unde rezultă soluția căutată.

19. Dacă într-un tetraedru $ABCD$ muchiile opuse sînt congruente două cîte două, atunci dreptele care trec prin mijloacele lor sînt două cîte două perpendiculare și sînt axe de simetrie ale tetraedrului.

Soluție. Fie K, L, M, N, P și Q mijloacele muchiilor tetraedrului $ABCD$ (vezi fig. IV. 14). Arătăm că oricare

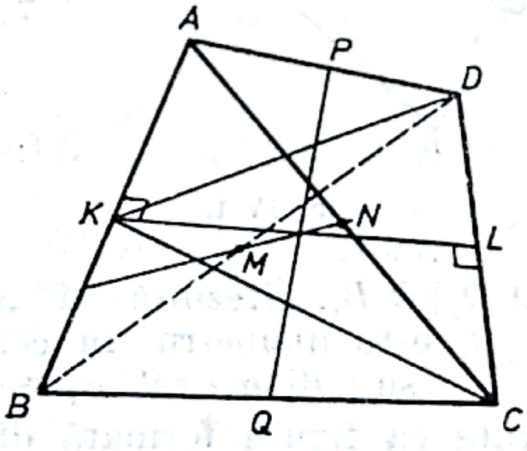


Fig. IV.14

din segmentele $|KL|$, $|MN|$ sau $|PQ|$ este axă de simetrie a tetraedrului și este perpendiculară pe fiecare din celelalte două. Din congruența triunghiurilor ABD și ABC rezultă că medianele $|DK|$ și $|CK|$ sînt congruente. Deci triunghiul DKC este isoscel și atunci mediana sa $|KL|$ este și înălțime. Rezultă că avem $KL \perp DC$ și, analog, $KL \perp AB$. Deoarece B este simetricul lui A în raport cu $|KL|$, iar C simetricul lui D în raport tot cu $|KL|$, segmentul $|KL|$ este axă de simetrie a tetraedrului.

Scanned with OKEN Scanner

Segmentul $|BC|$ este simetricul lui $|AD|$, deci mijlocul Q al segmentului $|BC|$ este simetricul mijlocului P al lui $|AD|$. Dreapta PQ trece prin punctele P și Q, simetrice în raport cu $|KL|$ și o intersectează. Rezultă că $PQ \perp KL$.

20. Fie M centrul de simetrie al figurii formate din cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r)$. Prin translația care transformă pe $\mathscr{C}_1(O_1, r)$ în $\mathscr{C}_2(O_2, r)$, un punct $A_1 \in \mathscr{C}_1(O_1, r)$ se transformă în $A_2 \in \mathscr{C}_2(O_2, r)$. Să se arate că punctul B_1, simetricul lui A_2 în raport cu M, este diametral opus punctului A_1.

Soluție. Segmentul $|O_1B_1|$ este simetric cu segmentul $|O_2A_2|$ pentru că punctele O_1 și O_2, respectiv, A_2 și B_1 sînt simetrice în raport cu M. Translația dată duce pe A_1 în A_2 și pe O_1 în O_2 (vezi fig. IV.15). Deci $A_1O_1 \parallel A_2O_2$.

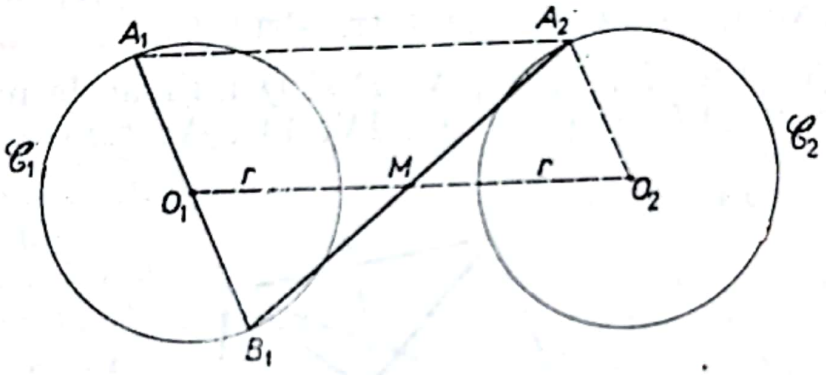


Fig. IV.15

De asemnea, $A_2O_2 \parallel O_1B_1$. Rezultă că A_1, O_1 și B_1 sînt coliniare iar $|A_1B_1|$ este diametru în cercul $\mathscr{C}_1$ și deci punctele A_1 și B_1 sînt diametral opuse.

21. Să se arate că figura formată din două drepte neparalele și neconcurente are trei axe de simetrie.

Soluție. Compunem simetria centrală în raport cu mijlocul perpendicularei comune a celor două drepte, cu simetria plană în raport cu unul din planele determinate de perpendiculara comună și o dreaptă din cele două date. Obținem transformarea care duce o dreaptă peste cealaltă. Această compunere este o simetrie axială. A treia axă de simetrie este perpendiculara comună a celor două drepte.

22. Fie ABC un triunghi dreptunghic în care $|AB| \perp \perp |AC|$, $\|AB\| < \|AC\|$ și M un punct oarecare aparținînd

lui $|BC|$. Fie D simetricul lui M față de $|AB|$ și E simetricul lui M față de $|AC|$. Să se demonstreze că:

a) Punctele D, A și E sînt coliniare.

b) Triunghiul DME este dreptunghic.

c) Să se compare segmentele $|DE|$ și $|AM|$.

Soluție. a) Datorită simetriei rezultă că $\widehat{MAB} = \widehat{BAD}$ și $\widehat{MAC} = \widehat{CAE}$ (vezi fig. IV.16). Dar măs $(\widehat{BAM}) +$ $+$ măs $(\widehat{MAC}) = 90°$. Deci măs $(\widehat{DAE}) = 180°$ și atunci punctele D, A și E sînt coliniare.

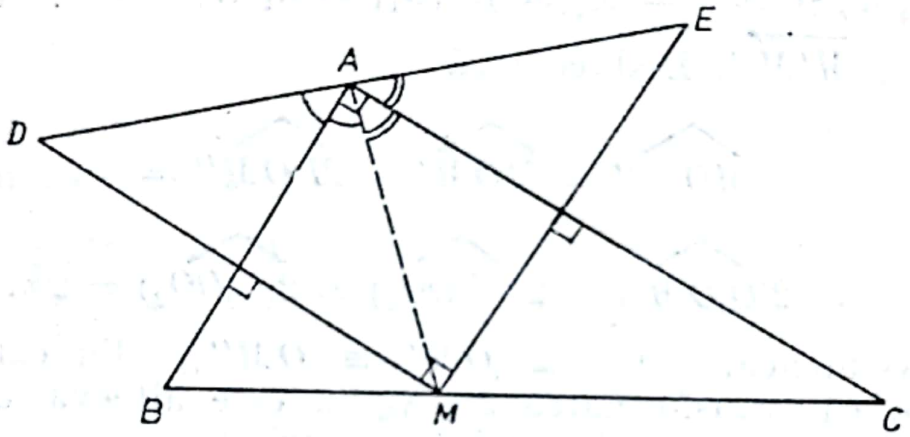


Fig. IV.16

b) $|DM| \perp |AB|$ și $|AC| \perp |AB|$, deci $|DM| \parallel |AC|$. La fel $|ME| \parallel |AB|$ și atunci $\widehat{DME} \equiv \widehat{BAC}$ avînd ca măsură $90°$; deci ΔDME este dreptunghic cu măs $(DME) = 90°$.

c) Datorită simetriei avem $|AD| \equiv |AM|$ și $|AE| \equiv$ $\equiv |AM|$, deci $\|DE\| = 2\|AM\|$.

23. Fie S_{d_1} și S_{d_2} simetrii ale planului π în raport cu dreptele d_1 și d_2. Să se arate că

a) $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ este o translație dacă $d_1 \parallel d_2$.

b) $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ este o rotație de centru O dacă $d_1 \cap d_2 =$ $= \{O\}$.

Soluție. a) Considerăm un punct $M_1 \in d_1$. Fie $M_2 \in d_2$ piciorul perpendicularei din M_1 pe d_2. Fie $N \in \pi$. Notăm $N' = S_{d_1}(N)$ și $N'' = S_{d_2}(N')$ iar cu $\{Q_1\} = d_1 \cap \overrightarrow{NN'}$ și

cu $\{O_2\} = d_2 \cap \overrightarrow{N'N''}$, $d(\overrightarrow{M_1M_2}) = \vec{v}$. Deducem că

$$d(\overrightarrow{NN''}) = d(\overrightarrow{NN'}) + d(\overrightarrow{N'N''}) = 2\overrightarrow{O_1N'} +$$

$$+ 2\overrightarrow{N'O_2} = 2(\overrightarrow{O_1N'} + \overrightarrow{N'O_2}) = 2\overrightarrow{O_1O_2} = 2\vec{v}.$$

Rezultă că $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ este translaţia de vector $2\vec{v}$.

b) Fie unghiul $(\widehat{d_1, d_2}) = \hat{\alpha}$, orientat în sens trigonometric, şi $M \in \pi$ un punct arbitrar astfel că $M'' = S_{d_1}(M)$ şi $M'' = S_{d_2}(M')$, $\{O_1\} = d_1 \cap \overrightarrow{MM'}$ şi $\{O_2\} = d_2 \cap \overrightarrow{M'M''}$. Deducem că

$$\widehat{MOM''} = \widehat{MOM'} + \widehat{M'OM''} =$$

$$= 2(\widehat{O_1OM'}) + 2(\widehat{M'OO_2}) = 2(\widehat{O_1OO_2}) = 2\hat{\alpha}.$$

De asemenea, $|OM| \equiv |OM'| \equiv |OM''|$, din care deducem că transformarea $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ nu este altceva decît o rotaţie de centru O şi unghi de măsură 2α.

24. Fie P şi P' două puncte mobile ce pornesc din acelaşi punct, mişcîndu-se pe o dreaptă d cu vitezele constante $V \neq V'$ şi $V < V'$. Considerîndu-se în fiecare moment arce capabile de un unghi de măsură constantă corespunzător segmentului determinat de cele două puncte, se cere să se afle locul geometric al centrelor cercurilor din care fac parte aceste arce.

Soluţie. Presupunem că mişcarea are loc în acelaşi sens. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$, care conţine arcul capabil de unghi de măsură α, şi $\mathscr{C} \cap d = \{P, P'\}$, punctele P şi P' reprezentînd poziţia mobilelor în momentul t (vezi fig. IV.17). Dacă Q este proiecţia lui O pe dreapta d, atunci avem măs $(\widehat{POP'}) = 2\alpha$ şi $\dfrac{\|PO\|}{\|PQ\|} = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \text{const.}$

Rezultă că şi

$$\frac{\|PO\|}{\|PP'\|} = \text{const.} \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

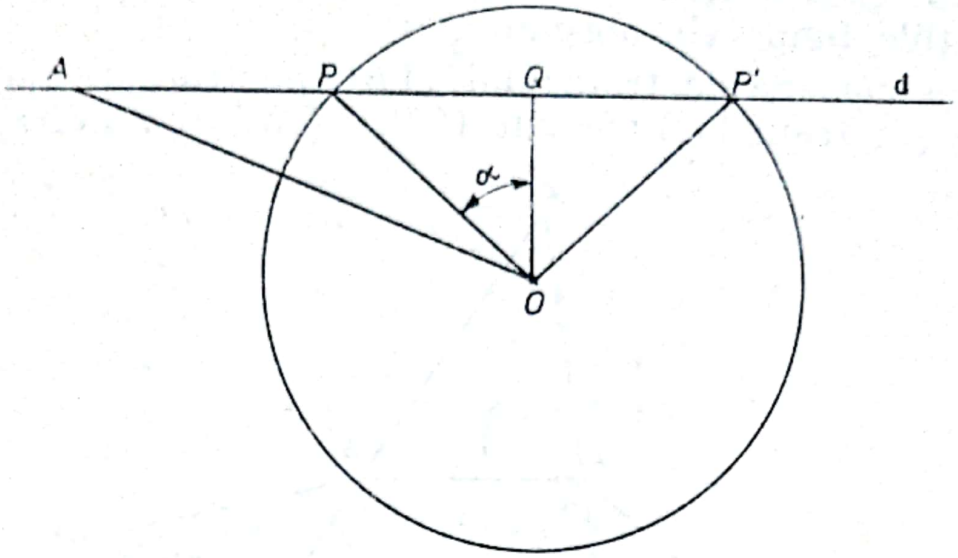


Fig. IV.17

Dacă notăm cu A punctul de unde începe mișcarea, vom avea

$$\frac{\|PP'\|}{\|AP\|} = \frac{\|AP\| - \|AP'\|}{\|AP\|} = \frac{\|\vec{v}'t - \vec{v}t\|}{\|\vec{v}t\|} = \text{const.}$$

Deci

$$\frac{\|PP'\|}{\|AP\|} = \text{const} \tag{2}$$

și

$$\frac{\|PO\|}{\|PP'\|} \cdot \frac{\|PP'\|}{\|AP\|} = \frac{\|PQ\|}{\|AP\|} = \text{const.}$$

Cum măs $\widehat{(APO)} = \alpha + 90° = \text{const}$, rezultă că și măs $\widehat{(PAO)} = \text{const}$. De aici rezultă că O descrie o semidreaptă cu originea în A. Dacă $\alpha < 90°$ punctul O se află în semiplanul π determinat de dreapta d, deci locul geometric este inclus în acest plan. Dacă $\alpha = 90°$ locul punctului O este inclus în dreapta d. Dacă $\alpha > 90°$ locul geometric pe care îl descrie O este inclus în semiplanul π' opus lui π. Centrul celuilalt cerc (din care face parte celălalt arc capabil de unghiul α corespunzător segmentului $|PP'|$) fiind simetric cu O față de d, rezultă că locul geometric al lui este o semidreaptă simetrică în raport cu dreapta d.

Scanned with OKEN Scanner

25. Să se arate că în orice triunghi avem $R/2r \geqslant m_a/h_a$, notațiile fiind cele obișnuite.

Soluție. Se dă triunghiul ABC pentru care se construiește triunghiul median $A'B'C'$ (vezi fig. IV.18). Fie

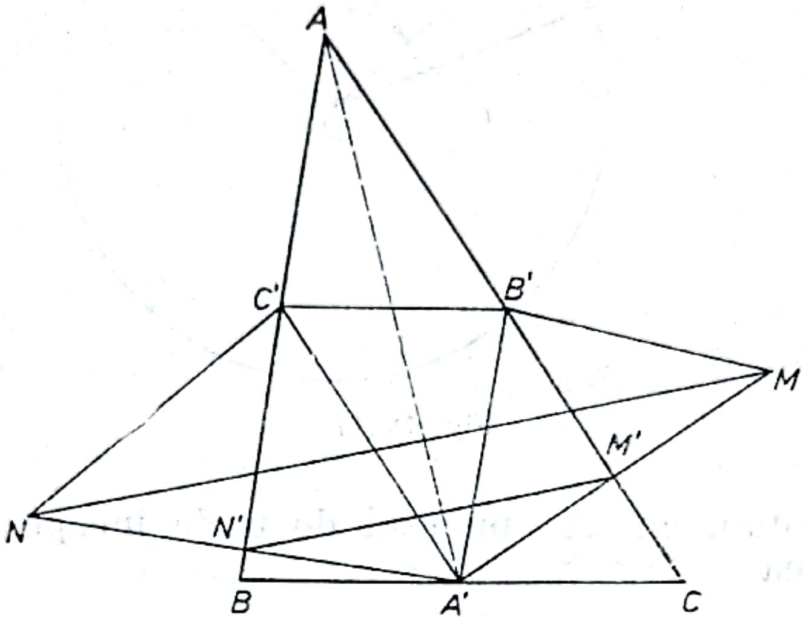


Fig. IV.18

$A'M \perp AC$, M fiind simetricul lui A' față de $|AC|$ și $A'N \perp AB$, punctul N fiind simetricul lui A' față de $|AB|$. Se observă că

$$\| MN \| \leqslant \| MB' \| + \| B'C' \| + \| C'N \| \qquad (1)$$

și

$$| MB' | \equiv | B'A' | \quad \text{și} \quad | NC' | \equiv | A'C' |, \qquad (2)$$

de unde

$$\| MN \| \leqslant \| B'A' \| + \| A'C' \| + \| B'C' \|,$$

deci

$$\| MN \| \leqslant P_{A'B'C'}\,; \quad \| MN \| \leqslant \frac{1}{2} P_{ABC}\,; \| MN \| \leqslant p. \qquad (3)$$

Din $|A'M'| \equiv |M'M|$, $\{M'\} = A'M \cap AC$ și $|AN'| \equiv |NN'|$, $\{N'\} = A'N \cap BC$, avem

$$\| MN \| = 2 \| M'N' \|\,; \qquad (4)$$

$|M'N'|$ este linie mijlocie în triunghiul $A'MN$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul $A'N'M'$ avem

$$\frac{\| M'N' \|}{\sin A'} = \frac{\| A'M' \|}{\sin N'}. \qquad (5)$$

Din măs $(\widehat{N'A'M'}) = 180° -$ măs $(\widehat{BAC})$ rezultă că $\sin \hat{A}' = \sin \hat{A}$ și măs $(\widehat{A'AC}) =$ măs $(\widehat{A'N'M'})$, care înlocuite în (5) dau

$$\frac{\| M'N' \|}{\sin \hat{A}} = \frac{\| A'M' \|}{\sin (\widehat{A'AC})}.$$

Deoarece măs $(\widehat{AM'A'}) = 90°$ avem

$$\| M'N' \| = m_a \sin \hat{A}. \tag{6}$$

Înlocuind relațiile (4) și (6) în (3) obținem

$$2 m_a \sin \hat{A} \leqslant p,$$

care, înmulțind-o cu $\frac{S}{p \sin \hat{A}}$, conduce la

$$\frac{2 m_a S}{p} \leqslant \frac{S}{\sin \hat{A}}.$$

Cum $\frac{S}{p} = r$ și $S = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$, obținem

$$2 m_a r \leqslant \frac{bc \sin \hat{A}}{2 \sin \hat{A}};$$

$$\frac{bc \sin \hat{A}}{2 \sin \hat{A}} = \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4S} \frac{2S}{a} = R h_a;$$

$$\frac{abc}{4S} = R \quad \text{și} \quad \frac{2S}{a} = h_a.$$

Deci $2 m_a r \leqslant R h_a$, de unde $\frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_a}{h_a}$.

Scanned with OKEN Scanner

26. Fiind date punctele A și B situate de aceeași parte a unui plan π, să se afle în acest plan punctul M pentru care suma distanțelor sale la punctele A și B este minimă.

Soluție. Fie C simetricul lui B față de planul π. Atunci dacă $M \in \pi$ avem $|BM| \equiv |CM|$. Deci $\|AM\| + \|BM\| = \|AM\| + \|CM\|$ și suma $\|AM\| + \|BM\|$ este minimă dacă punctele A, M și C sînt colineare.

27. Fie triunghiul ABC și H ortocentrul său. Să se demonstreze că simetricele lui H față de laturile triunghiului sînt situate pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Soluție. Fie D punctul de intersecție al înălțimii AA' cu cercul circumscris (vezi fig. IV.19). Arătăm că triun-

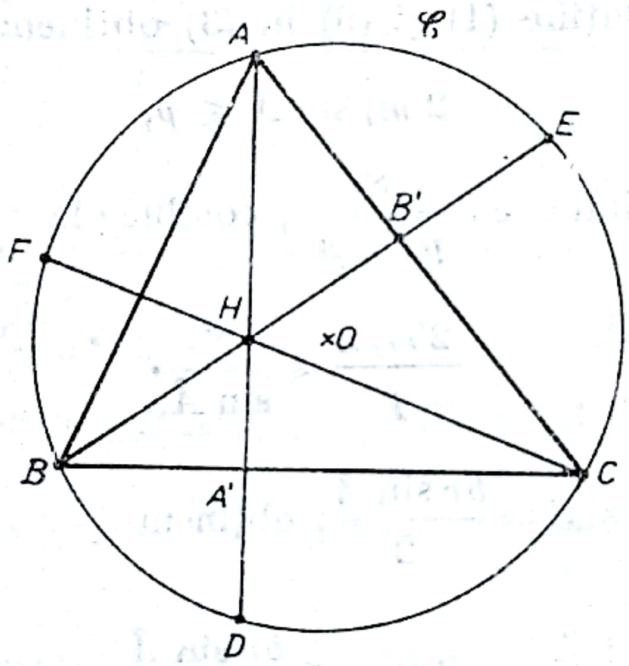


Fig. IV.19

ghiul HBD este isoscel, adică $|BH| \equiv |BD|$. Observăm că $\widehat{BDH} \equiv \widehat{BCA}$, avînd ca măsură $\frac{1}{2}\widehat{AB}$; $\widehat{BHD} \equiv \widehat{BCA}$ deoarece măs $(\widehat{BHD}) = 90° -$ măs $(\widehat{CBB'})$ și măs $(\widehat{BCA}) = 90° -$ măs $(\widehat{CBB'})$. Rezultă că $\widehat{BHD} \equiv \widehat{BDH}$ și $|BD| \equiv |BH|$, $BA' \perp HD$ (ipoteza) și atunci

$|A'H| \equiv |A'D|$. Deci punctul $D \in \mathscr{C}$ este simetricul lui H față de latura $|BC|$.

28. Să se construiască un triunghi ABC cînd se dă vîrful A fix, punctul G de intersecție al medianelor, vîrful B se află pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$, iar vîrful C pe o dreaptă dată d.

Soluție. Unim punctele fixe A cu G. Prelungim AG cu un segment $|GA'| = \frac{1}{2}|AG|$. Punctul A' este punctul de intersecție al medianei duse din A cu latura $|BC|$ a triunghiului; avem deci $|A'B| \equiv |A'C|$ (vezi fig. IV.20).

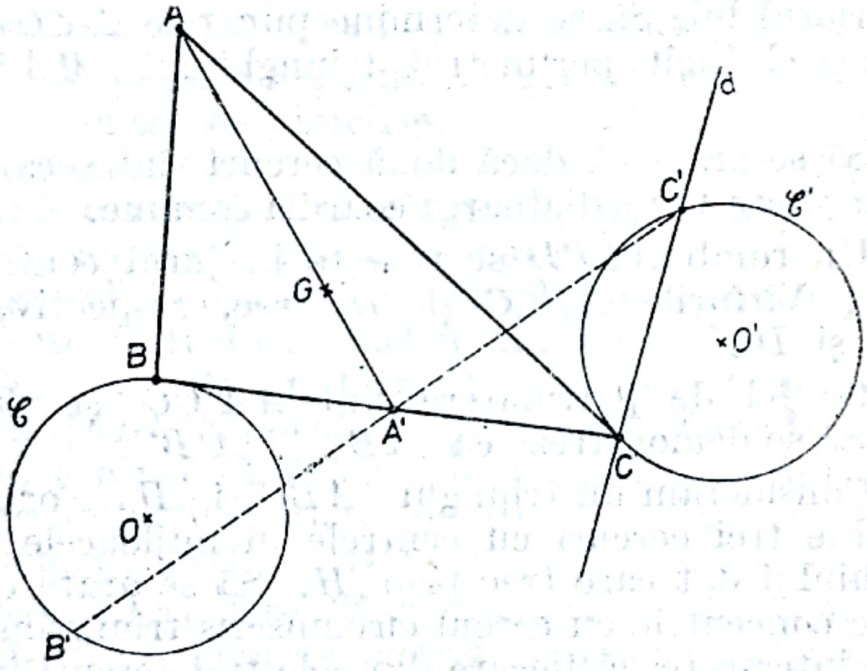


Fig. IV.20

Fie $\mathscr{C}'(O', r)$ simetricul cercului $\mathscr{C}(O, r)$ față de punctul A'. Întîlnim următoarele situații:

a) $\mathscr{C}' \cap \mathrm{d} = \{C, C'\}$. Corespondentele lor în simetria S_A, vor fi punctele B, respectiv, B' ce aparțin cercului $\mathscr{C}$ și deci problema are două soluții, și anume triunghiul ABC sau $AB'C'$.

b) $\mathscr{C}' \cap \mathrm{d} = \{C\}$ soluția este triunghiul ABC.

c) $\mathscr{C}' \cap \mathrm{d} = \{\emptyset\}$ problema nu are soluție.

Scanned with OKEN Scanner

3. PROBLEME PROPUSE

1. Fie C_x și C_y două margini vecine ale unei mese de biliard. Pe masă se găsesc două bile A și B. Prima din aceste bile trebuie lansată astfel încît să se lovească de marginea C_x a mesei și apoi să se ciocnească cu bila B. a) Să se traseze drumul ei. b) Aceeași problemă dacă se cere ca bila să se ciocnească cu bila B după ce s-a lovit de marginile C_x și C_y ale masei.

2. Fie unghiul xOy și M un punct aparținînd bisectoarei sale OZ. Să se ducă prin M o dreaptă astfel încît să intersecteze pe Ox în A și pe Oy în B cu condiția ca:

a) Suma $\|OA\| + \|OB\|$ să fie minimă.

b) Aria triunghiului AOB să fie minimă.

3. Considerăm unghiul ascuțit xOy și un punct M în interiorul lui. Să se determine punctele $A \in Ox$ și $B \in Oy$ astfel încît perimetrul triunghiului MAB să fie minim.

4. Să se arate că dacă două cercuri sînt secante, linia centrelor lor este mediatoarea coardei comune.

5. Un romb $ABCD$ se rotește în jurul centrului său cu 90°. Vîrfurile A,B,C și D trec, respectiv, în A', B', C' și D'.

a) Ce fel de patrulatere sînt $AA'CC'$ și $BB'DD'$?

b) Să se demonstreze că $|AB| \perp |A'B'|$.

6. Considerăm un triunghi ABC și H ortocentrul său. Fie trei cercuri cu centrele în mijloacele laturilor triunghiului dat care trec prin H. Să se arate că există un cerc concentric cu cercul circumscris triunghiului ABC și care intersectează fiecare din cele trei cercuri în puncte diametral opuse.

7. Fie dreapta d, punctele A și B, nesituate pe d, și segmentul $|MN|$ de lungime l. Să se suprapună $|MN|$ peste d astfel încît să fie văzut din A și B sub unghiuri egale.

8. Să se arate că două figuri simetrice în raport cu un punct se pot suprapune printr-o rotație.

9. Trei cercuri congruente au un punct comun. Să se arate că celelalte puncte de intersecție ale acestor cercuri sînt situate pe un cerc congruent cu cercurile date (*Teorema lui Țițeica*).

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se arate că dacă printre patrulaterele $MNPQ$ înscrise într-un patrulater dat $ABCD$ ($M \in |AB|$, $N \in |BC|$, $P \in |CD|$, $Q \in |DA|$: M, N, P și Q sînt distincte) există unul de perimetru minim, atunci $ABCD$ este inscriptibil.

11. Să se arate că cele patru perpendiculare pe laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil, duse din mijlocul laturilor aceluiași patrulater, sînt concurente în același punct.

12. Să se arate care este mulțimea finită M de puncte ale spațiului neconținute în același plan, cu proprietatea că oricare ar fi A și $B \in M$ să existe C și $D \in M$, astfel încît $|AB| \parallel |CD|$ și $|AB| \not\equiv |CD|$.

13. Să se arate că într-un poligon convex, cu cel puțin o axă de simetrie, se poate înscrie un pătrat.

14. Fie F o figură mărginită. Să se arate că ea nu poate avea două centre de simetrie.

15. Să se arate că :

a) Dacă o figură (F), mărginită, are două axe de simetrie, atunci acestea sînt concurente.

b) Punctul de intersecție al axelor de simetrie perpendiculare este centrul de simetrie al figurii (F).

16. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $|AB| \equiv |CD|$ și $|BC| \equiv |AD|$. Să se arate că centrul sferei înscrise în tetraedru, centrul sferei circumscrise tetraedrului și centrul de greutate sînt situate pe dreapta ce trece prin mijlocul muchiilor $|AC|$ și $|BD|$.

17. Se dau trei sfere diferite, exterioare două cîte două. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care intersectează cele trei sfere date după cîte un cerc mare. Discuție.

18. Să se arate că se poate construi un tetraedru cu toate fețele congruente dacă și numai dacă fețele sînt triunghiuri ascuțitunghice.

19. Să se arate că un poliedru este paralelipiped în fiecare din condițiile :

a) Poliedrul are un centru de simetrie ;

b) Secțiunea poliedrului cu un plan ce trece prin centrul de simetrie și printr-o muchie este paralelogram pentru orice muchie ;

c) Există un vîrf al poliedrului care este situat exact pe trei muchii.

Scanned with OKEN Scanner

20. Fie în interiorul triunghiului ABC punctele X, Y și Z astfel încît segmentele $|AY|$, $|AZ|$, $|BZ|$, $|BX|$ și $|CX|$, $|CY|$ să împartă unghiurile A, B și, respectiv, C în cîte trei părți egale. Să se arate că punctele X, Y și Z formează un triunghi echilateral.

Soluții. Indicații

1. a) Căutăm simetricul B' al lui B față de dreapta CX. Notăm $AB' \cap CX = \{M\}$. Datorită simetriei $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$, $\widehat{2} \equiv \widehat{3}$, deci $\widehat{1} \equiv \widehat{3}$ ($\hat{i} \equiv \hat{r}$ unghiuri de incidență, respectiv de reflexie) (vezi fig. IV. 21, a). Complementele

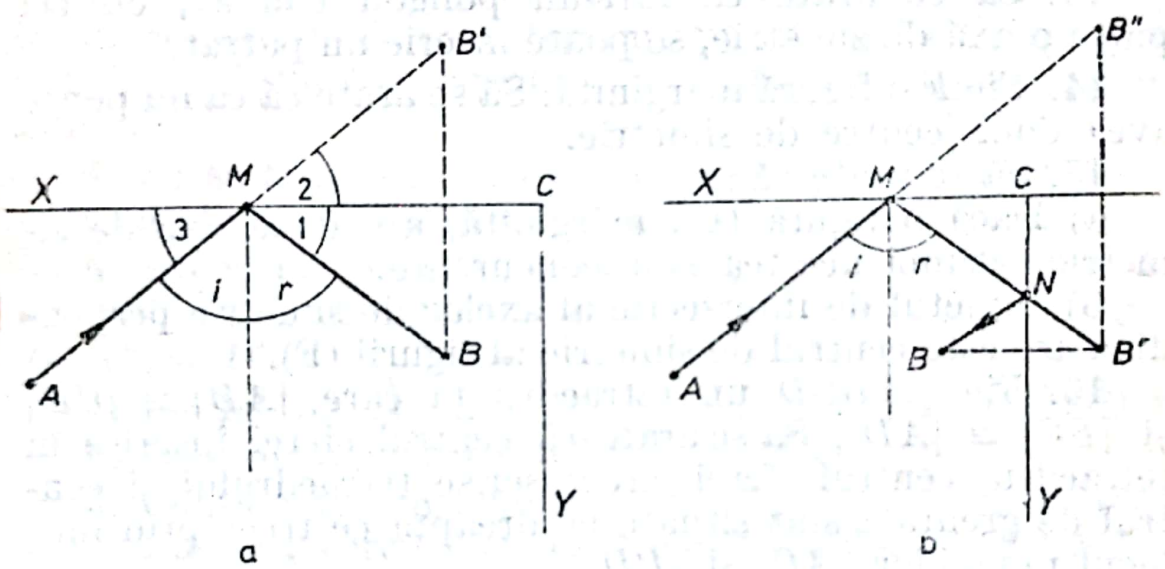


Fig. IV.21

acestor unghiuri vor fi și ele congruente. Rezultă că dacă lansăm bila A spre B' ea va trece în B după ce va lovi în M' marginea mesei.

b) Pentru ca bila să ajungă în B trebuie ca înainte de reflexie să meargă spre B' (vezi fig. IV. 21, b) etc. Drumul bilei va fi $AMNB$, traseu ce-l găsim ținînd seama de simetrie.

2. Ideea ce duce la rezolvarea problemei este aceea de a construi dreapta $C'D'$, simetrică cu CD față de bisectoarea Oz, care să treacă prin M. Se deduc în continuare relațiile necesare pe considerentul că Oz este axă de simetrie a figurii. Lungimea drumului AOB este minimă cînd $AB \perp Oz$. Se va duce prin M o dreaptă

oarecare CD și se va arăta că drumul AOB este mai scurt decît COD. Pentru a găsi o relație între ele se duce dreapta $C'D'$, simetrică cu CD față de Oz, și folosind teorema bisectoarei se găsește soluția căutată (vezi fig. IV. 22).

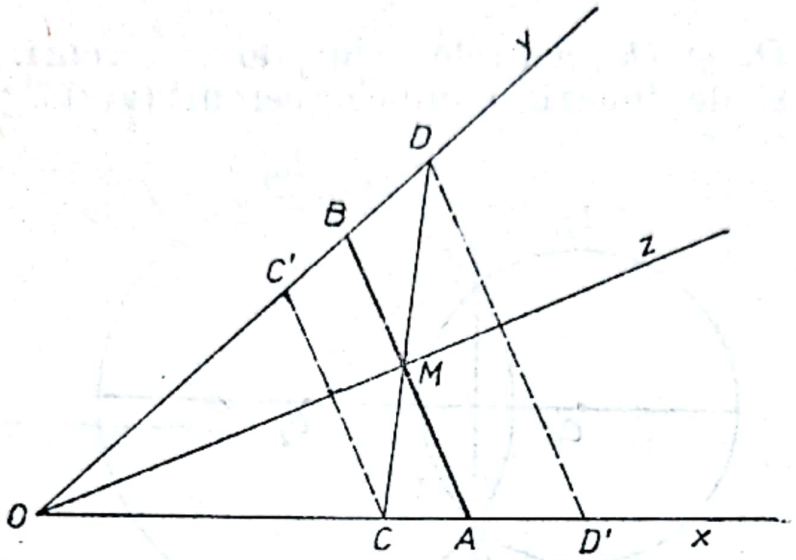


Fig. IV.22

3. Fie N și P simetricele punctului M în raport cu Ox și Oy. Rezultă că $|MA| \equiv |NA|$ și $|MB| \equiv |BP|$. Deci perimetrul triunghiului MAB este egal cu lungimea liniei frînte $NABP$ (vezi fig. IV.23). Se vede că capetele N și P ale acestei linii nu depind de poziția lui A și B ci numai de punctul M. Rezultă că perimetrul triunghiului

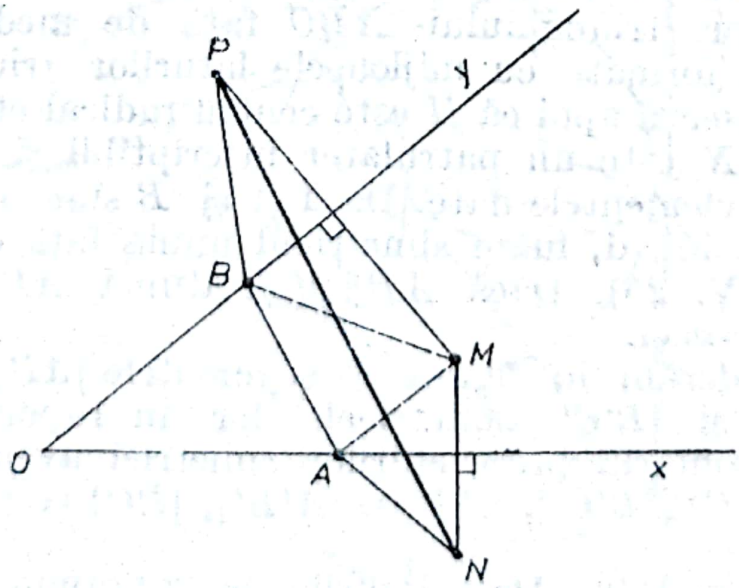


Fig. IV.23

MAB va fi minim cînd linia $NABP$ care unește punctele N și P va fi minimă și aceasta se întîmplă cînd punctele N, A, B și P sînt coliniare. Unim punctele N și P printr-un segment de dreaptă care întîlnește pe Ox și Oy în punctele căutate.

4. Fie O_1 și O_2 centrele celor două cercuri. Dreapta O_1O_2 este axă de simetrie a ambelor cercuri (vezi fig. IV.24).

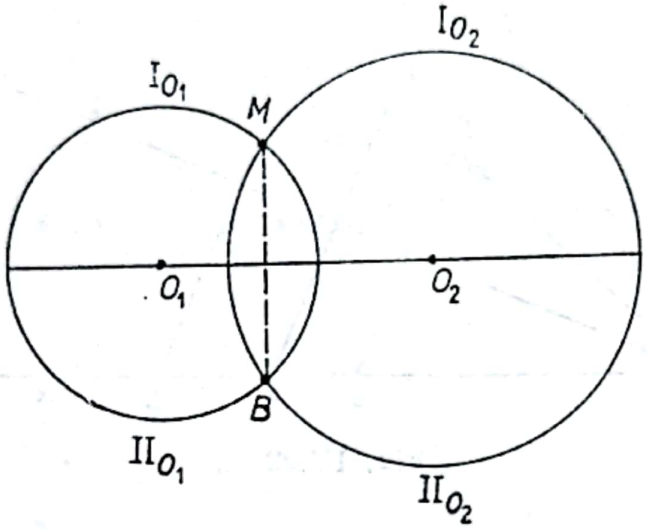


Fig. IV.24

Semicercul I_{O_1} este simetric cu II_{O_1} și I_{O_2} simetric cu II_{O_2}. Observăm că $I_{O_1} \cap I_{O_2} = \{M\}$ și $II_{O_1} \cap II_{O_2} = \{B\}$, deci punctele M și B sînt simetrice față de O_1O_2, de unde rezultă $O_1O_2 \perp MB$.

5. Dreapta AC este axă de simetrie a figurii etc.

6. Arătăm că $|AH|$, $|BH|$ și $|CH|$ sînt simetricele mediatoarelor triunghiului ABC față de mediatoarele triunghiului format cu mijloacele laturilor triunghiului ABC. Se observă apoi că H este centru radical etc.

7. $ABMN$ este un patrulater inscriptibil și se poate construi cu elementele date. Dacă A și B sînt de o parte și de alta a lui d, luăm simetricul unuia față de d etc. (vezi fig. IV. 25). Dacă $AB \parallel MN$ atunci $ABMN$ este un trapez isoscel.

8. Considerăm în figura F segmentele $|AB|$ și $|BC|$ iar $|A'B'|$ și $|B'C'|$ simetricele lor în raport cu un punct O. Conform proprietăților simetriei avem $|AB| \parallel |A'B'|$, $|BC| \parallel |B'C'|$, $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$ iar măs $(\widehat{BOB'}) = 180°$. Deci figurile se suprapun printr-o rotație de unghi egal cu 180°.

Scanned with OKEN Scanner

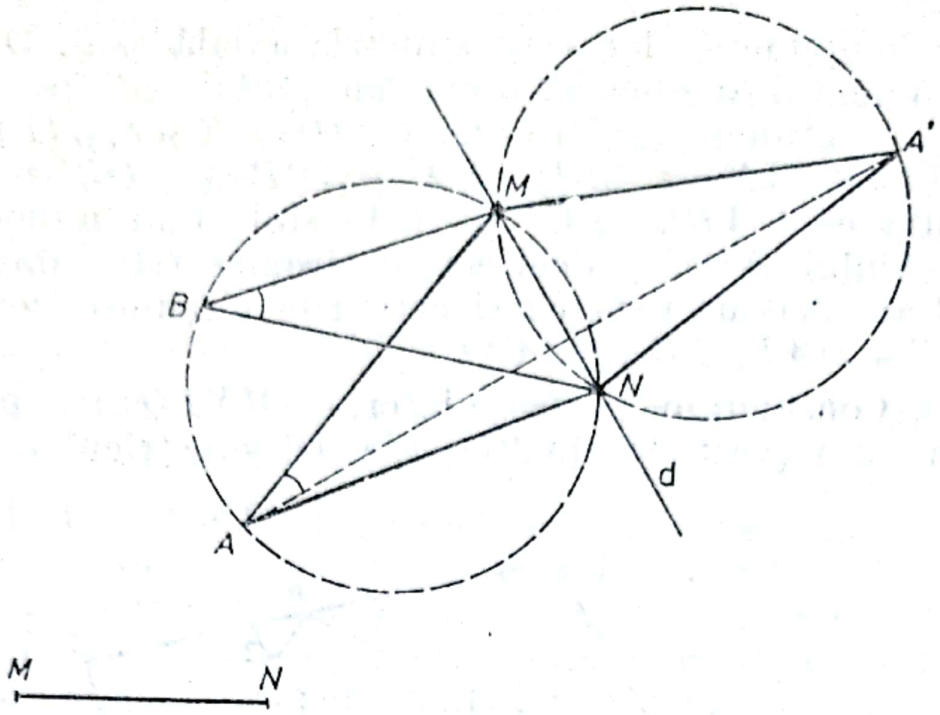


Fig. IV.25

9. Fie $\mathscr{C}_1(O_1, r)$, $\mathscr{C}_2(O_2, r)$, $\mathscr{C}_3(O_3, r)$ cele trei cercuri, M punctul lor comun iar A, B și C punctele în care se mai intersectează cercurie $\mathscr{C}_2(O_2, r)$ și $\mathscr{C}_3(O_3, r)$, $\mathscr{C}_3(O_3, r)$ și $\mathscr{C}_1(O_1, r)$, respectiv $\mathscr{C}_1(O_1, r)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r)$ (vezi fig. IV. 26). Considerăm simetriile axiale S_{AM}, S_{BM} și

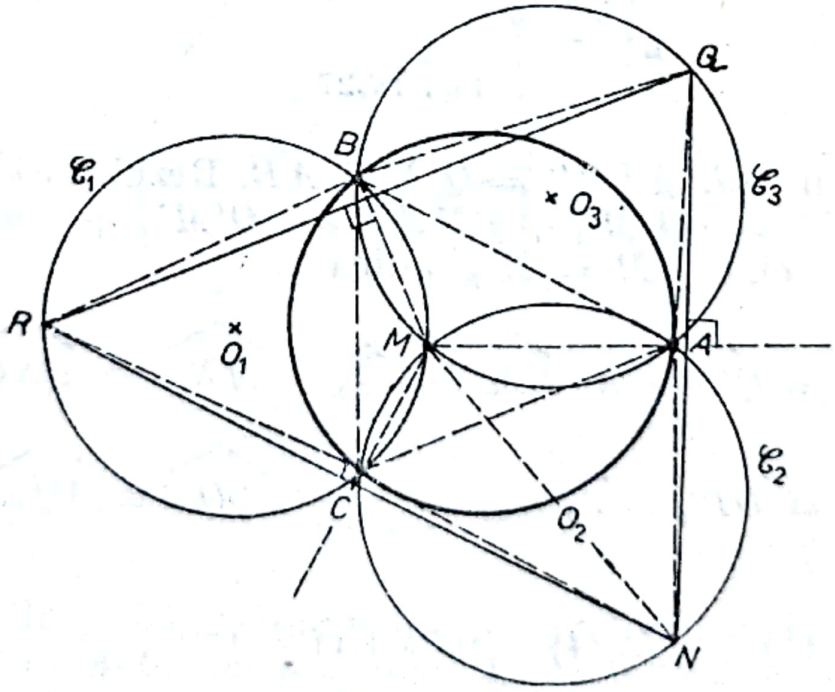
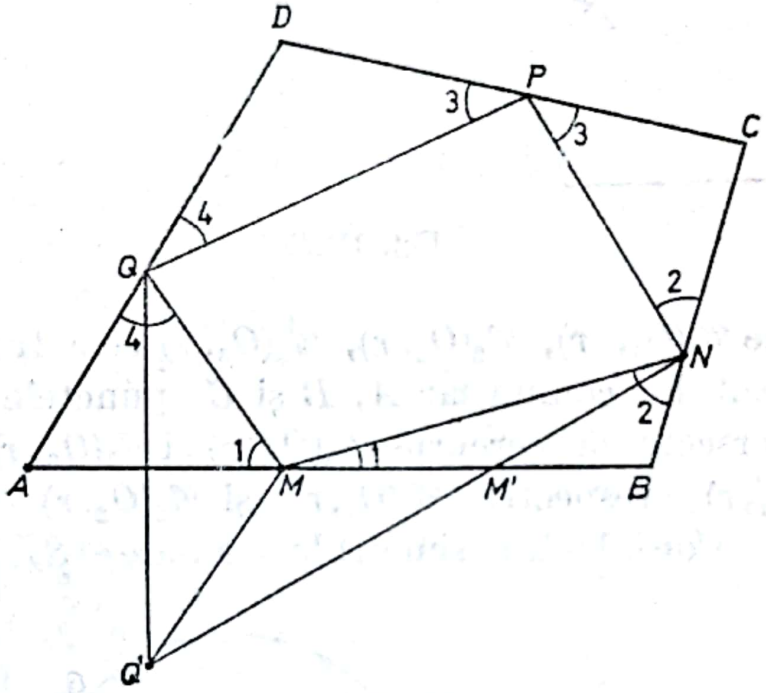


Fig. IV.26

S_{CM}. Compunerea lor este simetria axială S_{O_2M}. Dacă N este punctul diametral opus punctului M pe cercul $\mathscr{C}_2(O_2, r)$, atunci $S_{AM}(N) = Q$, $S_{BM}(Q) = R$ şi $S_{CM}(R) = N$, astfel încît $|AN| \equiv |AQ|$, $|BQ| \equiv |BR|$ şi $|CR| \equiv |CN|$. Rezultă că $|AB|$, $|BC|$ şi $|CA|$ sînt linii mijlocii ale triunghiului NQR şi deci cercul circumscris triunghiului ABC are aceeaşi rază ca şi cercurile circumscrise triunghiurilor QAB, BCR şi ANC.

10. Considerăm că patrulaterul $MNPQ$ are perimetrul minim (vezi fig. IV.27). Fie Q' simetricul lui Q în



Fig, IV.27

raport cu AB şi $\{M'\} = Q'N \cap AB$. Rezultă că $\|QM\| + \|MN\| = \|Q'M\| + \|MN\| \geqslant \|Q'M'\| + \|M'N\|$, cu egalitate cînd $M = M'$, adică

$$\widehat{QMA} \equiv \widehat{Q'MA} \equiv \widehat{BMN} = \hat{1}, \qquad \widehat{MNB} \equiv \widehat{PNC} = \hat{2},$$

$$\widehat{NPC} \equiv \widehat{DPQ} = \hat{3}, \qquad \widehat{DQP} \equiv \widehat{AQM} = \hat{4}.$$

Atunci

$$\text{măs}\,(\hat{1}) + \text{măs}\,(\hat{4}) + \text{măs}\,(\hat{A}) = 180°;$$

$$\text{măs}\,(\hat{1}) + \text{măs}\,(\hat{2}) + \text{măs}\,(\hat{B}) = 180°;$$

Scanned with OKEN Scanner

măs $(\widehat{2})$ + măs $(\widehat{3})$ + măs $(\widehat{C}) = 180°$;

măs $(\widehat{3})$ + măs $(\widehat{4})$ + măs $(\widehat{D}) = 180°$.

Din relațiile precedente avem măs $(\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} + \widehat{A} + \widehat{C} = 360°$ și la fel măs $(\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} + \widehat{B} + \widehat{D}) = 360°$, deci măs $(\widehat{A} + \widehat{C})$ = măs $(\widehat{B} + \widehat{D})$ și patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

11. Fie $MNPQ$ mijloacele laturilor patrulaterului inscriptibil dat și $\{S\} = MP \cap NQ$. Patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram iar S este centrul său. Punctele M și P, respectiv, N și Q sînt simetrice față de S. Punctul de intersecție O al perpendicularelor ridicate din M, N, P și Q este centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$. Perpendicularele coborîte din M, N, P și Q pe laturile opuse sînt paralele cu cele ridicate din aceleași puncte pe laturile respective, de aceea se vor intersecta și ele într-un punct O', simetricul lui O față de S (vezi fig. IV.28).

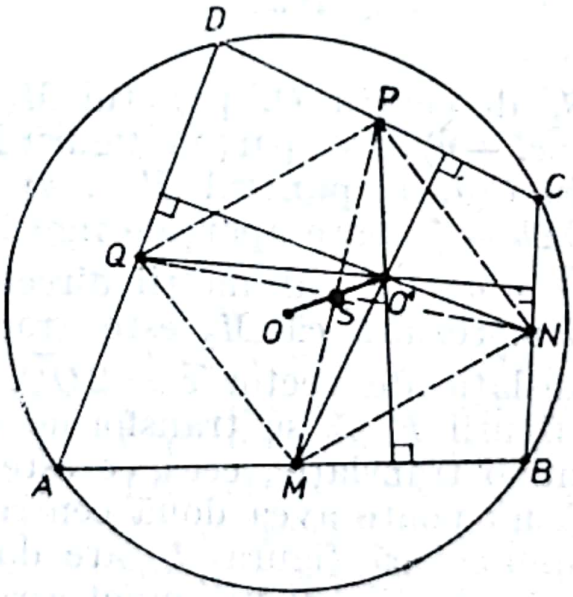


Fig. IV.28

12. Mulțimea ce îndeplinește condițiile cerute există, ea fiind formată din punctele M care sînt vîrfurile unui cub și simetricele centrului său față de două fețe opuse ale cubului.

13. Notăm cu P frontiera poligonului și cu d' axa de simetrie. Vom folosi în continuare faptul că funcțiile continue au proprietatea lui Darboux.

14. Presupunem că figura (F) are două centre de simetrie, fie acestea O și C. Considerăm un sistem de axe rectangulare având originea în $O(0,0)$ și $C\ (a,\ b)$ (vezi fig. IV.29). Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al figurii F.

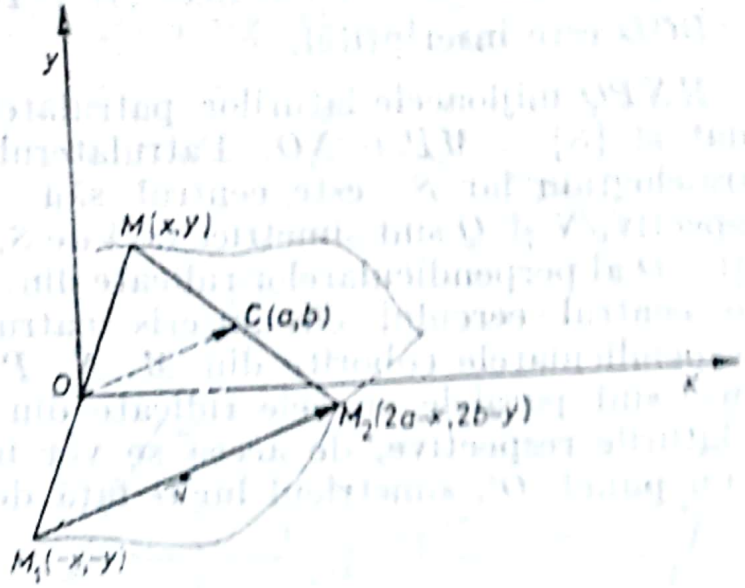


Fig. IV.29

Prin simetria S_1 de centru O, punctul $M(x, y)$ se transformă în $M_1\ (-x, -y)$ care aparține figurii F. Prin simetria S_2 de centru $C(a, b)$, punctul $M(x, y)$ se transformă în $M_2(2a - x,\ \ 2b - y)$ care aparține figurii F. Deoarece $\| M_1M_2 \| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$, iar parametrii directori ai dreptei M_1M_2 sînt a și b, rezultă că M_2 este transformatul lui M_1 printr-o translație de vector $\vec{v} = 2\overrightarrow{OC}$. Ar trebui ca orice punct al figurii F să se transforme într-un punct al figurii F printr-o translație, ceea ce este absurd. Deci figura mărginită nu poate avea două centre de simetrie.

15. a) Presupunem că figura F are două axe de simetrie paralele, $d_1 \| d_2$. Fie M un punct aparținînd figurii F și $M_1 = S_{d_1}(M)$, $M_1 \in (F)$ și $M_2 = S_{d_2}(M_1)$, $M_2 \in (F)$. După cum am văzut, punctul M se transformă în M_2 prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$: $|\vec{v}| = 2\rho$ și $\vec{v} \perp d_1$. Rezultă că translația $T_{\vec{v}}$ transformă orice punct al figurii (F) în punct al figurii F, ceea ce este absurd întrucît F este finită. Deci axele de simetrie sînt concurente.

13. Notăm cu P frontiera poligonului și cu d' axa de simetrie. Vom folosi în continuare faptul că funcțiile continue au proprietatea lui Darboux.

14. Presupunem că figura (F) are două centre de simetrie, fie acestea O și C. Considerăm un sistem de axe rectangulare avînd originea în $O(0,0)$ și $C\ (a,\ b)$ (vezi. fig. IV.29). Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al figurii F.

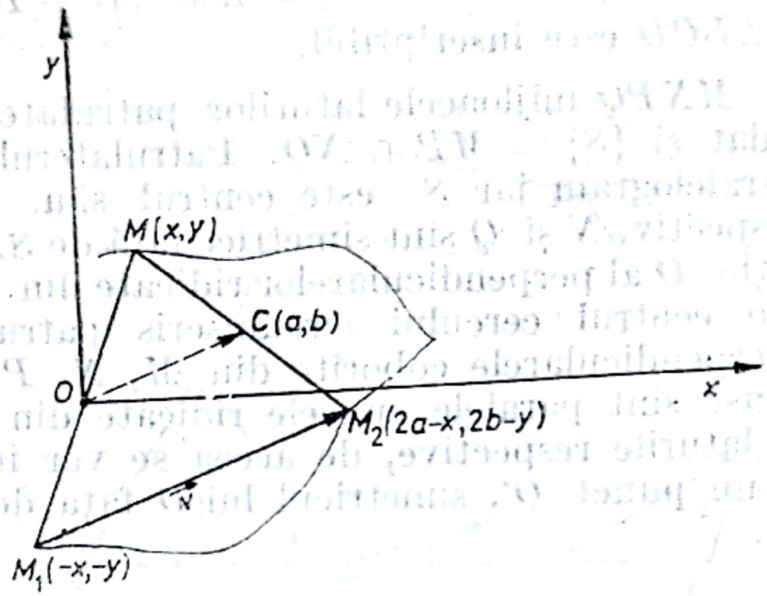


Fig. IV.29

Prin simetria S_1 de centru O, punctul $M(x, y)$ se transformă în $M_1\ (-x, -y)$ care aparține figurii F. Prin simetria S_2 de centru $C(a, b)$, punctul $M(x, y)$ se transformă în $M_2(2a - x,\ \ 2b - y)$ care aparține figurii F. Deoarece $\| M_1M_2 \| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$, iar parametrii directori ai dreptei M_1M_2 sînt a și b, rezultă că M_2 este transformatul lui M_1 printr-o translație de vector $\vec{v} = 2\overrightarrow{OC}$. Ar trebui ca orice punct al figurii F să se transforme într-un punct al figurii F printr-o translație, ceea ce este absurd. Deci figura mărginită nu poate avea două centre de simetrie.

15. a) Presupunem că figura F are două axe de simetrie paralele, $d_1 \| d_2$. Fie M un punct aparținînd figurii F și $M_1 = S_{d_1}(M)$, $M_1 \in (F)$ și $M_2 = S_{d_2}(M_1)$, $M_2 \in (F)$. După cum am văzut, punctul M se transformă în M_2 prin translația $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$: $|\vec{v}| = 2\rho$ și $\vec{v} \perp d_1$. Rezultă că translația $T_{\vec{v}}$ transformă orice punct al figurii (F) în punct al figurii F, ceea ce este absurd întrucît F este finită. Deci axele de simetrie sînt concurente.

b) Fie O punctul de intersecție al dreptelor perpendiculare d_1 și d_2. Alegem sistemul de axe de coordonate avînd pe d_1 drept axă xx' și d_2 drept axă yy'. Prin $S_{d_1} \circ S_{d_2}$ punctul $M \in (F)$ se transformă în $M_1 \in (F)$. Dar avem $S_{d_1} \circ S_{d_2} = R(O, 180°)$, deci este egal cu o simetrie de centru O. Rezultă că prin S_0, orice punct $M \in (F)$ se transformă într-un punct al figurii (F) și deci O este centru de simetrie al figurii (F).

16. Dreapta ce trece prin mijlocul muchiilor $|AC|$ și $|BD|$ este axă de simetrie a tetraedrului.

17. Fie $\mathcal{S}(O,R)$ o sferă care intersectează două sfere $\mathcal{S}_1(O_1,R_1)$, respectiv, $\mathcal{S}_2(O_2,R_2)$, după cîte un cerc mare. Dacă M_1 și M_2 aparțin cercurilor mari de intersecție ale sferei $\mathcal{S}$ cu $\mathcal{S}_1$, respectiv, $\mathcal{S}_2$, atunci avem

$$\|O_1M_1\|^2 + \|O_1O\|^2 = \|O_2M_2\|^2 + \|O_2O\|^2 = R^2,$$

de unde

$$\|O_1O\|^2 - \|O_2O\|^2 = R_2^2 - R_1^2.$$

Rezultă că O se află într-un plan perpendicular pe $|O_1O_2|$. Acest plan este simetricul planului radical al celor două sfere față de planul mediator. Locul geometric căutat este intersecția a trei plane perpendiculare pe segmentele $|O_1O_2|$, $|O_1O_3|$ și $|O_2O_3|$ în cazul că punctele O_1, O_2 și O_3 nu sînt coliniare. Dacă centrele sferelor sînt coliniare locul geometric este mulțimea vidă.

18. Fie $ABCD$ tetraedrul căutat. Din $\Delta ABC \equiv \Delta BCD$ rezultă că $|AB| \equiv |CD|$ și $|AC| \equiv |BD|$ sau $|AB| \equiv |BD|$ și $|AC| \equiv |CD|$, de unde obținem $|BC| \equiv |AD|$. Punem condiția ca muchiile opuse ale tetraedrului să fie congruente. Considerăm triunghiul oarecare ABC și fie C' simetricul lui C față de mijlocul lui $|AB|$ iar C'' simetricul lui C' față de $|AB|$. Rotind triunghiul ABC în jurul lui $|AB|$, el va descrie un cerc. Construim sfera cu centrul în C și de rază $|AB|$. Sfera intersectează cercul în două puncte distincte, ceea ce este echivalent cu $\|CC''\| < \|AB\| < \|CC'\|$. Din $\|CC''\| < \|AB\|$ rezultă că măs $(\widehat{CAB}) < 90°$ și măs $(\widehat{ABC}) < 90°$. Din $\|CC'\| > \|AB\|$ reiese că măs $(\widehat{ACB}) < 90°$. Prin urmare triunghiul ABC este ascuțitunghic. În caz contrar construcția tetraedului în condițiile impuse este imposibilă.

Scanned with OKEN Scanner

19. Fie A_0 un vîrf al poliedrului situat pe muchiile $|A_0A_1|$, $|A_0A_2|$ și $|A_0A_3|$. Deoarece poliedrul are drept centru de simetrie vîrful A_0', simetric cu vîrful A_0, el este situat pe trei muchii: $|A_0'A_1'|$, $|A_0'A_2'|$ și $|A_0'A_3'|$, unde $A_i'(i = 1,2,3)$ sînt simetricele vîrfurilor A_i. Fie π_i planul care trece prin centrul de simetrie al poliedrului și prin muchia $|A_0A_i|(i = 1,2,3)$. Planul π_i conține și muchia $|A_0'A_i'|$. Intersecția poliedrului cu planul π_i este paralelogramul $A_0A_iA_0'A_i'$. Fie S_{jk}, $j \neq k$ $(j, k = 1,2,3)$ fața poliedrului dat, care trece prin vîrfurile A_0, A_j și A_k, iar S_{jk}' fața simetrică. Dacă numerele j și k sînt diferite de i și j, $k = 1,2,3$, atunci planul π_i intersectează fața S_{jk}. Deoarece $A_0 \in S_{jk}$ iar $A_0' \notin S_{jk}$ și $A_i \notin S_{ik}$, atunci $A_i' \in S_{jk}$. Arătăm în mod identic că $A_i \in S_{jk}'$. Dacă $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ și sînt două cîte două distincte, atunci, conform celor arătate mai sus, avem A_i, $A_j' \in S_{jk}'$ și A_i, $A_j' \in S_{ik}$. Pentru $i \neq j$, $|A_j'A_i|$ este muchia poliedrului iar paralelogramele $A_0A_iA_j'A_k$ și $A_0'A_i'A_jA_k'$ sînt fețe. Prin urmare poliedrul are șase fețe care sînt două cîte două paralele deoarece poliedrul are centru de simetrie. Rezultă că poliedrul este un paralelipiped.

20. Dacă notăm măs $(\widehat{A}) = 3\alpha$, măs $(\widehat{B}) = 3\beta$ și măs $(\widehat{C}) = 3\gamma$, din măs $(\widehat{A})$ + măs $(\widehat{B})$ + măs $(\widehat{C}) = 180°$ deducem că măs $(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) = 60°$ (vezi fig. IV.30).

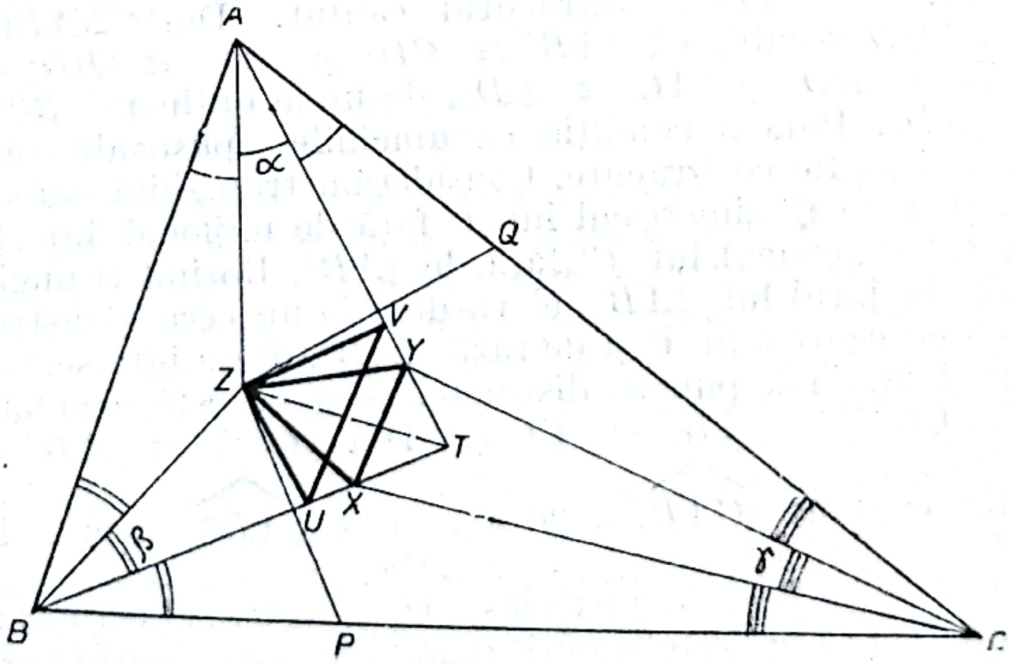


Fig. IV.30

Fie $\{T\} = AY \cap BX$. În triunghiul ABT, $|AZ|$ și $|BZ|$ sînt bisectoare, deci și $|TZ|$ este bisectoare. Avem măs $(\widehat{ATZ})$ = măs $(\widehat{ZTB})$ = măs $(\widehat{ATB})/2$ = $= (180° - 2\alpha - 2\beta)/2 = (60° + 2\gamma)/2 = 30° + \gamma$.

Fie $U \in |BT|$ și $V \in |AT|$ astfel încît măs $(\widehat{UZT})$ = = măs $(\widehat{TZV}) = 30°$. Din $\Delta ZTV \equiv \Delta ZTU$ rezultă $|ZU| \equiv$ $\equiv |ZV|$. Deoarece măs $(\widehat{VZU}) = 60°$, înseamnă că triunghiul ZUV este echilateral. Pentru demonstrarea problemei vom arăta că măs $(\widehat{U})$ = măs $(\widehat{X})$ și măs $(\widehat{V})$ = = măs $(\widehat{Y})$.

Fie P și Q simetricele punctului Z față de $|BU|$, respectiv, $|AV|$. Deoarece $\widehat{ZBU} \equiv \widehat{UBC}$ și $\widehat{ZAV} \equiv \widehat{VAC}$ rezultă că $P \in |BC|$ și $Q \in |AC|$. Din motive de simetrie și avînd în vedere că ΔZUV este echilateral rezultă că

$$|PU| \equiv |UZ| \equiv |UV| \equiv |ZV| \equiv |VQ|,$$

$$\text{măs } (\widehat{ZVA}) = \text{măs } (\widehat{VZT}) + \text{măs } (\widehat{ZTV}) =$$

$$= 30° + 30° + \gamma = 60° + \gamma,$$

$$\text{măs } (\widehat{ZVQ}) = 2 \text{ măs } (\widehat{ZVA}) = 120° + 2\gamma.$$

Rezultă că

$$\text{măs } (\widehat{UVQ}) = 360° - 60° - 120° - 2\gamma =$$

$$= 180° - 2\gamma.$$

Analog, măs $(\widehat{PUV}) = 180° - 2\gamma$. Prin urmare $UVQP$ este trapez isoscel deci inscriptibil.

Scanned with OKEN Scanner

Trunghiul PUV fiind isoscel au loc relațiile

$$\text{măs}\,(\widehat{UPV}) = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\gamma)}{2} = \text{măs}\,(\widehat{\gamma}),$$

$$\text{măs}\,(\widehat{PVQ}) = \text{măs}\,(\widehat{UVQ}) - \text{măs}\,(\widehat{UVP}) =$$

$$= 180^\circ - 2\gamma - \gamma = 180^\circ - 3\gamma.$$

Dar $\text{măs}\,(\widehat{PCQ}) = 3\gamma$, deci și patrulaterul $PVQC$ este înscris în același cerc ca și $PUVQ$. Din $|PU| \equiv |UV| \equiv |VQ|$ rezultă că

$$\text{măs}\,(\widehat{UCP}) = \text{măs}\,(\widehat{VCU}) = \text{măs}\,(\widehat{QCV}),$$

deci $\text{măs}\,(\widehat{U}) = \text{măs}\,(\widehat{X})$ și $\text{măs}\,(\widehat{V}) = \text{măs}\,(\widehat{Y})$ și problema este rezolvată.

Scanned with OKEN Scanner

OMOTETIA

Fie în planul E^2 un punct C și un număr real nenul k. Se numește *omotetie* de centru C și raport k transformarea $H : E^2 \to E^2$ care asociază fiecărui punct M al planului punctul $M' = H(M)$ definit de relația $\overrightarrow{CM'} = k \cdot \overrightarrow{CM}$.

Punctul M' se numește omoteticul punctului M prin omotetia de centru C și raport k, pentru care vom folosi notația $H_{(C,k)}(M) = M'$ sau, cînd nu există pericol de confuzie, $M' = H(M)$.

Pentru $k = 1$, rezultă $H(M) = M$ (transformarea identică).

Pentru $k \neq 1$, singurul punct M care satisface $H(M) = M$ este C.

Pentru $k > 0$, spunem că H este omotetia directă.

Pentru $k < 0$, spunem că H este omotetia indirectă.

Pentru $k = -1$, omotetia este simetria în raport cu punctul C.

Pentru precizarea centrului C și a raportului k vom folosi pentru omotetie și notația $H(C, k)$.

Teorema 1.1. *Orice omotetie $H(C, k)$ este bijectivă; inversa ei există și $H^{-1}(C, k) = H(C, k^{-1})$.*

Teorema 1.2. *Pentru orice omotetie H de centru C și raport k, din $H(M) = M'$ și $H(N) = N'$ rezultă că $MN \parallel M'N'$ și $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$.*

Teorema 1.3. *Orice omotetie are proprietățile următoare:*

— *duce o dreaptă AB într-o dreaptă paralelă $A'B'$;*

— *duce segmentul $|AB|$ în segmentul $|A'B'|$;*

— *duce semiplanul $|\mathrm{d}A$ în semiplanul $|\mathrm{d}'A'$;*

Scanned with OKEN Scanner

— *duce cercul* $\mathscr{C}(O, r)$ *în cercul* $\mathscr{C}'(O', r')$, *unde* $r' = |k|\, r$;

— *duce un arc de cerc* $\overset{\frown}{ABC}$ *în arcul de cerc* $\overset{\frown}{A'B'C'}$;

— *centrul de omotetie este propriul său omotetic*;

— *o dreaptă* d, *care trece prin centrul de omotetie, se transformă în ea însăși*;

— *un plan* π, *care trece prin centrul de omotetie, se transformă în el însuși*;

— *două figuri omotetice sînt asemenea.*

Teorema 1.4. *Dacă* S *este o simetrie, iar* H *o omotetie de centru* H *și raport* k, *avînd același domeniu și codomeniu cu* S, *atunci* $S \circ K \circ S$ *este o omotetie de centru* $C' = S(C)$ *și raport* k.

Teorema 1.5. *Dacă cercul* $\mathscr{C}'(O', r')$ *este imaginea cercului* $\mathscr{C}(O, r)$ *printr-o omotetie* $H(C, k)$, *atunci orice dreaptă* d *ce trece prin* C *taie simultan cercurile* $\mathscr{C}$ *și* $\mathscr{C}'$ *sub unghiuri congruente.*

Omotetia reprezezintă un mijloc deosebit de eficient pentru rezolvarea unor probleme de geometrie, sau pentru demonstrarea unor teoreme. Este necesar să se stabilească centrul de omotetie și raportul de omotetie, dar în așa fel încît să se simplifice pe cît posibil demonstrația. Construim apoi figura omotetică cu cea căutată, după care, pe baza anumitor teoreme sau proprietăți ale omotetiei, determinăm un element al noii figurii care se află în relație cu omoteticul său din problema sau teorema ce trebuie demonstrată. Acest element va fi elementul cheie alături de care folosind și celelalte date ale problemei vom ajunge la soluția cerută.

Exemplu. Să se înscrie un pătrat într-un sector circular $\overset{\frown}{AOB}$ dat, astfel încît două din vîrfuri să se afle pe razele care mărginesc sectorul, iar celelalte două vîrfuri pe arcul de cerc $\overset{\frown}{AmB}$ al sectorului dat.

Analiza problemei. Presupunem problema rezolvată și efectuăm construcția conform ipotezei problemei. Observăm că putem construi o infinitate de pătrate care să aibă două vîrfuri pe razele $|OA|$ și $|OB|$ ale sectorului de cerc dat, dar numai un singur pătrat va avea celelalte două vîrfuri pe arcul $\overset{\frown}{AmB}$ al sectorului, și acesta este cel căutat de noi. Constatăm că pătratul ce trebuie

construit este omotetic cu toate pătratele care au două vîrfuri pe razele $|OA|$ și $|OB|$, iar latura ce le unește este paralelă cu coarda $|AB|$. Deci aplicăm metoda omotetiei.

Soluție. Stabilim centrul de omotetie care este evident centrul O al cercului din care face parte sectorul dat (vezi fig. V.1). Considerăm că $MNPQ$ este pătratul ce trebuie să-l construim. El are vîrful M pe $|OA|$, vîrful N pe $|OB|$ și vîrfurile P și Q pe arcul $\overset{\frown}{AmB}$.

Construim pătrarul $CDEF$ cu vîrfurile C pe $|OA|$ și D pe $|OB|$, $|CD| \parallel |MN|$. Cele două pătrate sînt evident asemenea, deci sînt omotetice în omotetia de centru O și raport k (vezi teorema 1.3). Omoteticul vîrfului C este vîrful M, iar omoteticul vîrfului D este vîrful N, însă nu cunoaștem poziția punctelor M și N pe segmentele

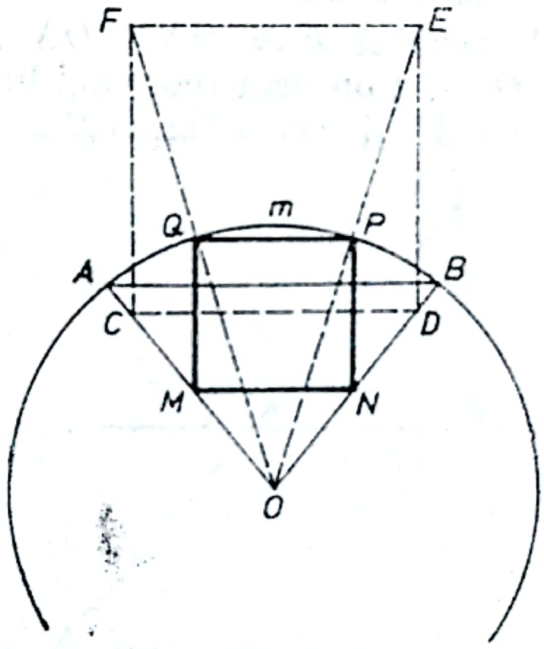


Fig. V.1

$|OC|$ și $|OD|$. Dacă reușim să găsim omoteticul vîrfului E care se află pe arcul $\overset{\frown}{AmB}$, aceasta va fi cheia rezolvării problemei. Înseamnă că am determinat un element al figurii necunoscute, adică al pătratului $MNPQ$ ce vrem să-l construim. Unind punctul O cu vîrful E al pătratului $CDEF$, segmentul $|OE|$ intersectează arcul $\overset{\frown}{AmB}$ într-un punct. Acesta este punctul P, omoteticul punctului E în omotetia de centru O.

Scanned with OKEN Scanner

Construcție. Ducem prin Q o paralelă la FC și găsim poziția punctului M pe $|OA|$. Construim prin P o paralelă la ED și găsim poziția punctului N pe $|OB|$. Patrulaterul $MNPQ$ fiind omoteticul pătratului $CDEF$ în omotetia de centru O este deci un pătrat și îndeplinește condițiile cerute de problemă.

2. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că dacă într-o omotetie H de centru O și raport k, punctelor M și N aparținînd dreptei d a planului π le corespund punctele M' și N' aparținînd dreptei d' a aceluiași plan, atunci dreptele d și d' sînt paralele.

Soluție. Din $\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$ rezultă $k=|OM'|/|OM|$. Din $\overrightarrow{ON'}=k\cdot\overrightarrow{ON}$ rezultă $k=|ON'|/|ON|$. Deci $|OM'|/|OM|=|ON'|/|ON|$. Conform teoremei lui Thales avem $MN \parallel M'N'$ și deci d $\parallel$ d' (vezi fig. V.2).

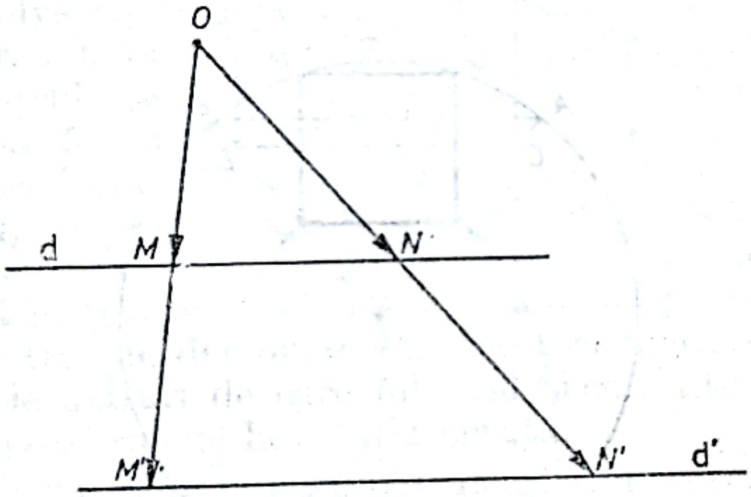


Fig. V.2

2. Se dă omotetia H de centru C și raport k. Să se arate că raportul segmentelor de dreaptă este invariat prin omotetia dată C, neaparținînd nici unuia dintre segmente.

Soluție. Considerăm segmentele $|MN|$ și $|PQ|$ astfel încît $|MN|/|PQ|=\gamma$ (vezi fig. V.3). Prin omotetia H de centru C și raport k aceste segmente se transformă în $|M'N'|$, respectiv $|P'Q'|$. Vom avea $\overrightarrow{M'N'}=k\cdot\overrightarrow{MN}$, deci $|M'N'|/|MN|=k$, $\overrightarrow{P'Q'}=k\cdot\overrightarrow{PQ}$, deci $|P'O'|/|PQ|=$

$= k$ și atunci $|M'N'|/|MN| = |P'Q'|/|PQ| = k \cdot |M'N'|/|k \cdot |P'Q'| = k \cdot |MN|/k \cdot |PQ| = |MN|/|PQ| = \gamma$.

3. Fie omotetia H de centru C și raport k. Să se arate că pentru un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ mulțimea $H(C) = \{H(x) | x \in \mathscr{C}\}$ este un cerc.

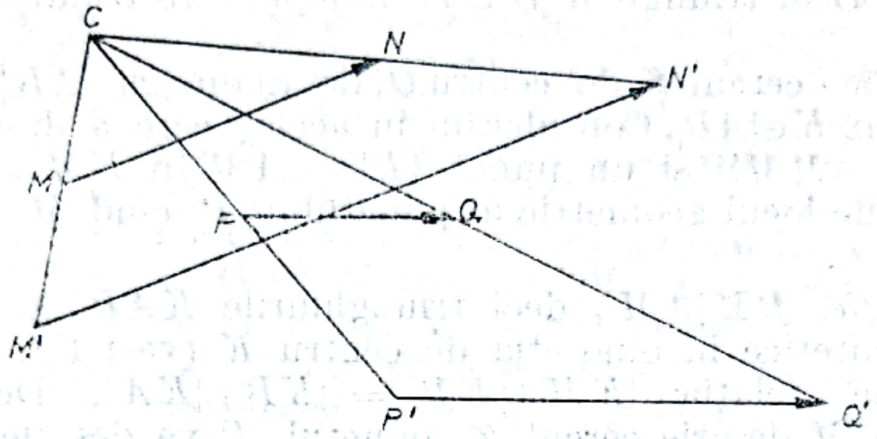
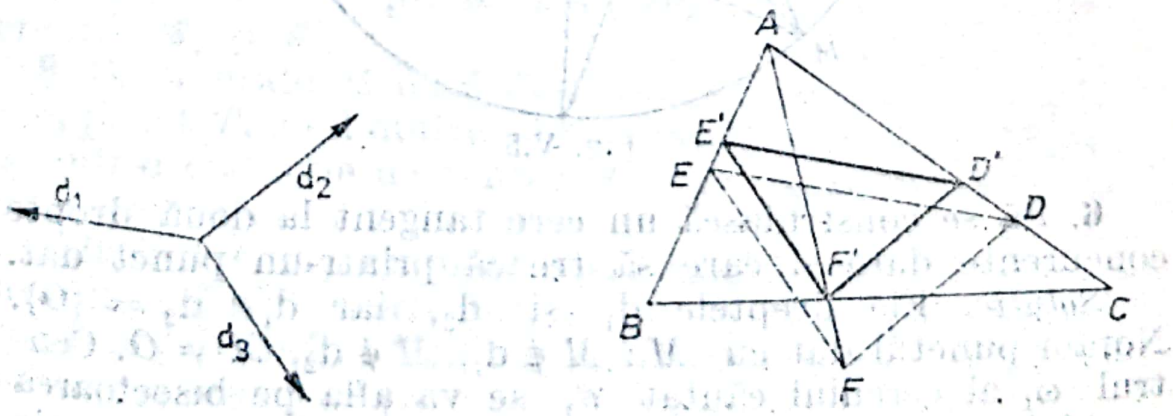


Fig. V.3

Indicație. Modulul razelor va fi egal cu modulul raportului de omotetie. Deci prin omotetia $H(C, k)$ un cerc se transformă într-un cerc congruent.

4. Într-un triunghi ABC să se înscrie un alt triunghi ale cărui laturi să fie paralele cu trei direcții date.

Soluție. Fie ABC triunghiul dat și d_1, d_2 și d_3 cele trei direcții. Luăm la întîmplare punctul $D \in |AC|$. Vîrful E al triunghiului căutat va aparține laturii $|AB|$ (vezi fig. V.4). Observăm că al treilea vîrf F al triunghiului căutat nu se află pe latura a treia a triunghiului dat; deci construcția nu îndeplinește condiția cerută în problemă, dar triunghiul DEF este omotetic celui căutat.



Fgi. V.4

Fie $\{F'\} = AF \cap BC$. Punctul F' este omoteticul lui F în omotetia de centru A și raport k. Avem, prin construcție, $DE \parallel d_1$, $DF \parallel d_2$ și $EF \parallel d_3$. Ducînd din F' paralele la EF, respectiv, FD se obțin punctele $E' \in |AB|$ și $D' \in |AC|$, care reprezintă celelalte vîrfuri ale triunghiului căutat. Deci triunghiul $D'E'F'$ îndeplinește condițiile cerute.

5. Fie cercul $\mathscr{C}$ de centru O, de diametru $|AB|$, și un punct fix $K \in |AB|$. Considerăm în același cerc $\mathscr{C}$ diametrul variabil $|MM'|$ și un punct $\{P\} = AM' \cap KM$. Să se determine locul geometric al punctului P cînd M descrie cercul $\mathscr{C}$.

Soluție. $BM \parallel AM'$, deci triunghiurile KAP și KBM sînt omotetice în omotetia de centru K (vezi fig. V. 5). Are loc relația $|KM| / |KP| = |KB| / |KA|$. Deci în timp ce M descrie cercul $\mathscr{C}$, punctul P va descrie omoteticul acestui cerc în omotetia de centru K și raport $\lambda = |KA| / |KB|$.

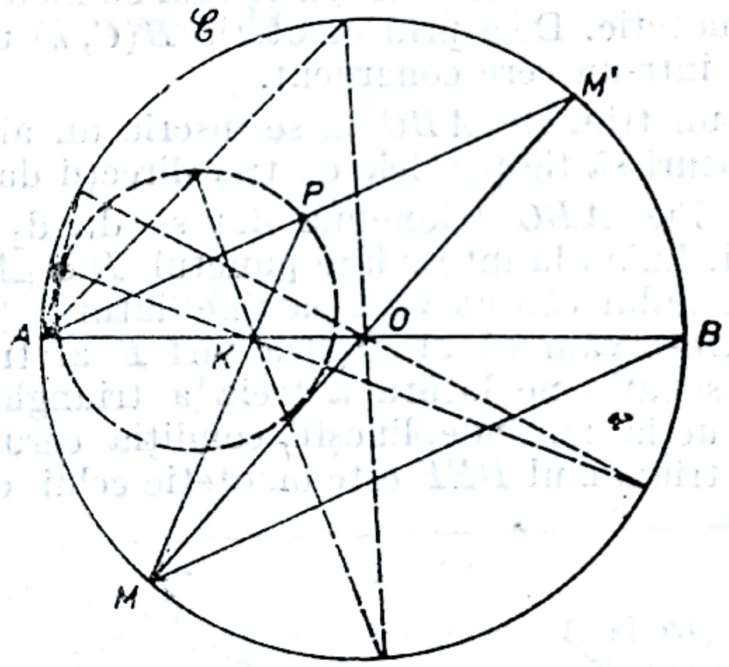


Fig. V.5

6. Să se construiască un cerc tangent la două drepte concurente date și care să treacă printr-un punct dat.

Soluție. Fie dreptele d_1 și d_2, iar $d_1 \cap d_2 = \{O\}$. Notăm punctul dat cu M; $M \notin d_1$, $M \notin d_2$, $M \neq O$. Centrul ω_1 al cercului căutat $\mathscr{C}_1$ se va afla pe bisectoarea unghiului celor două drepte. Cercul $\mathscr{C}_1$ este omotetic

Scanned with OKEN Scanner

oricărui cerc tangent dreptelor d_1 și d_2, centrul omotetiei fiind O.

Construcție. Vom construi bisectoarea unghiului dreptelor d_1 și d_2 și cercul $\mathscr{C}$ (ω, r) cu centrul pe bisectoare și tangent dreptelor d_1 și d_2. Dreapta OM intersectează cercul $\mathscr{C}$ în punctele P și P'. Deoarece $\mathscr{C}_1$ este omoteticul lui $\mathscr{C}$ în omotetia de centru O, ducem din M paralele la $P'\omega$, respectiv, $P\omega$. Aceste paralele vor intersecta bisectoarea în punctele ω_1, respectiv, ω_2, care vor fi centrele cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ căutate. Observăm că problema are două soluții; cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ de centre ω_1 și ω_2 (vezi fig. V. 6, a). Dacă $M \in d_1$ sau $M \in d_2$, problema are o singură soluție (vezi fig. V. 6, b). Dacă M aparține bisectoarei, problema are două soluții (vezi fig. V. 6, c).

7. Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat și la o dreaptă dată într-un punct A situat pe această dreaptă.

Soluție. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$, dreapta d și punctul $A \in d$. Notăm cu $\mathscr{C}'$ cercul căutat (având centrul ω), tangent la dreapta d în punctul A iar la cercul $\mathscr{C}$ în punctul I (vezi fig. V.7). Punctul I este un centru de omotetie al cercurilor $\mathscr{C}'$ și $\mathscr{C}$. În omotetia de centru I omologul lui A este punctul $T \in \mathscr{C}(O, r)$. Razele $|\omega A|$ și $|OT|$ sînt paralele, deci tangenta în T la cercul $\mathscr{C}$ este paralelă cu d. Rezultă că T este o extremitate a diametrului cercului $\mathscr{C}$, deci acest diametru este perpendicular pe dreapta d.

Construcție. Construim cercul $\mathscr{C}$ cu diametrul perpendicular pe dreapta d, T și T' fiind punctele unde diametrul intersectează cercul. Dreptele AT și AT' intersectează cercul $\mathscr{C}$ în I și respectiv I'. Centrul cercului căutat se va afla la intersecția dreptei OI (sau OI') cu perpendiculara în A pe d. Problema are două soluții: cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}'$.

8. Să se arate că dacă două cercuri sînt tangente într-un punct T, unul dintre cercuri este transformatul celuilalt într-o omotetie de centru T și de raport egal cu raportul razelor.

Soluție. Fie M_1 un punct oarecare al cercului $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$. Dreapta TM_1 intersectează cercul $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ într-un punct M_2 (vezi fig. V. 8). Triunghiurile TM_1O_1 și TM_2O_2 sînt asemenea și avem

$$|TM_2| / |TM_1| = |TO_2| / |TO_1| = \\ = |O_2M_2| / |O_1M_1| = r_2/r_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

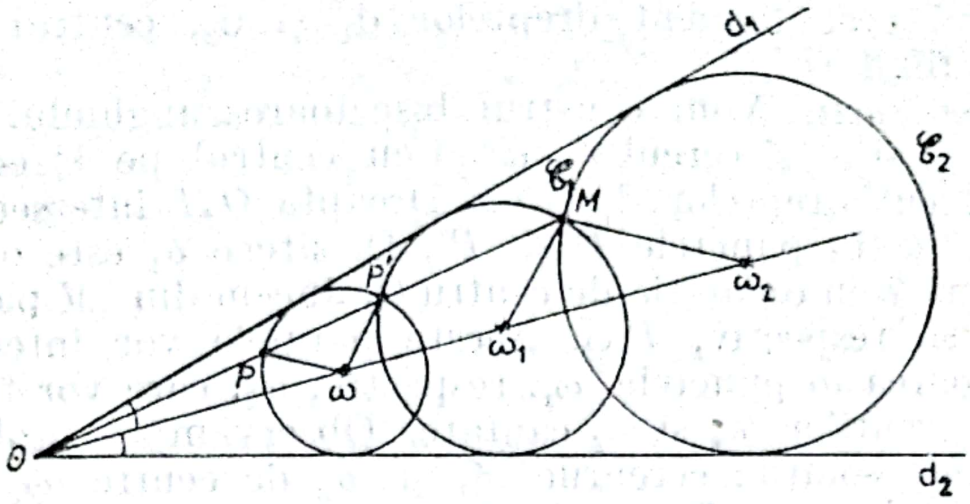


Fig. V.6, a

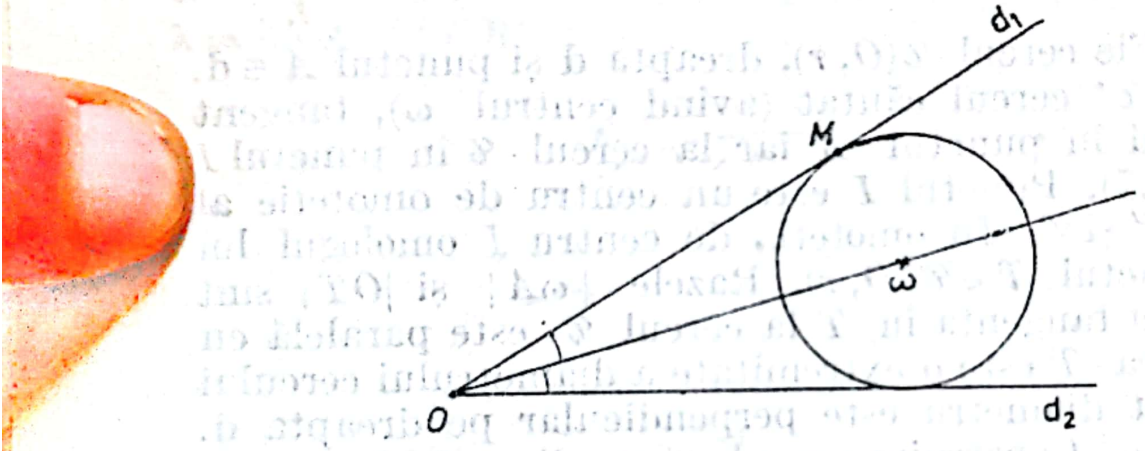


Fig. V.6, b

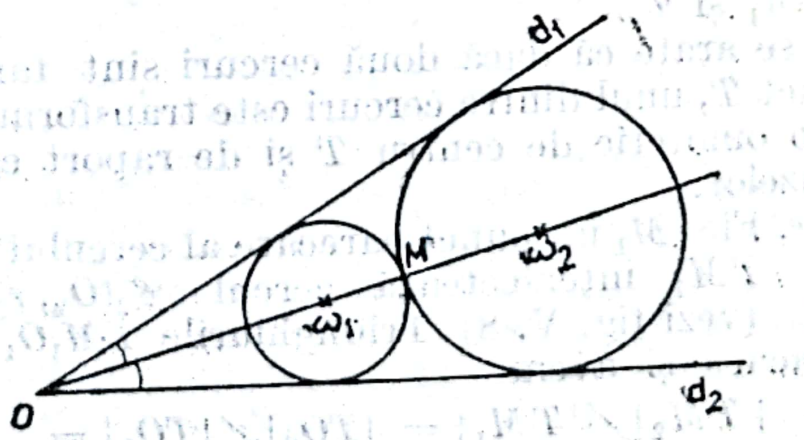


Fig. V. 6, c

Deci pentru orice $M_1 \in \mathscr{C}_1$, există $M_2 \in \mathscr{C}_2$ astfel încît

$$|TM_2| \diagup |TM_1| = r_2/r_1 = k.$$

Rezultă că transformatul lui M_1 în omotetia de centru T și raport $r_2/r_1 = k$ este M_2. Cum M_1 este un punct oarecare al cercului $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, rezultă că cercul $\mathscr{C}_2$ este omoteticul cercului $\mathscr{C}_1$ în omotetia de centru T și raport $k = r_2/r_1$. Lăsăm în seama cititorului analiza cazului cînd cercurile sînt tangente interioare.

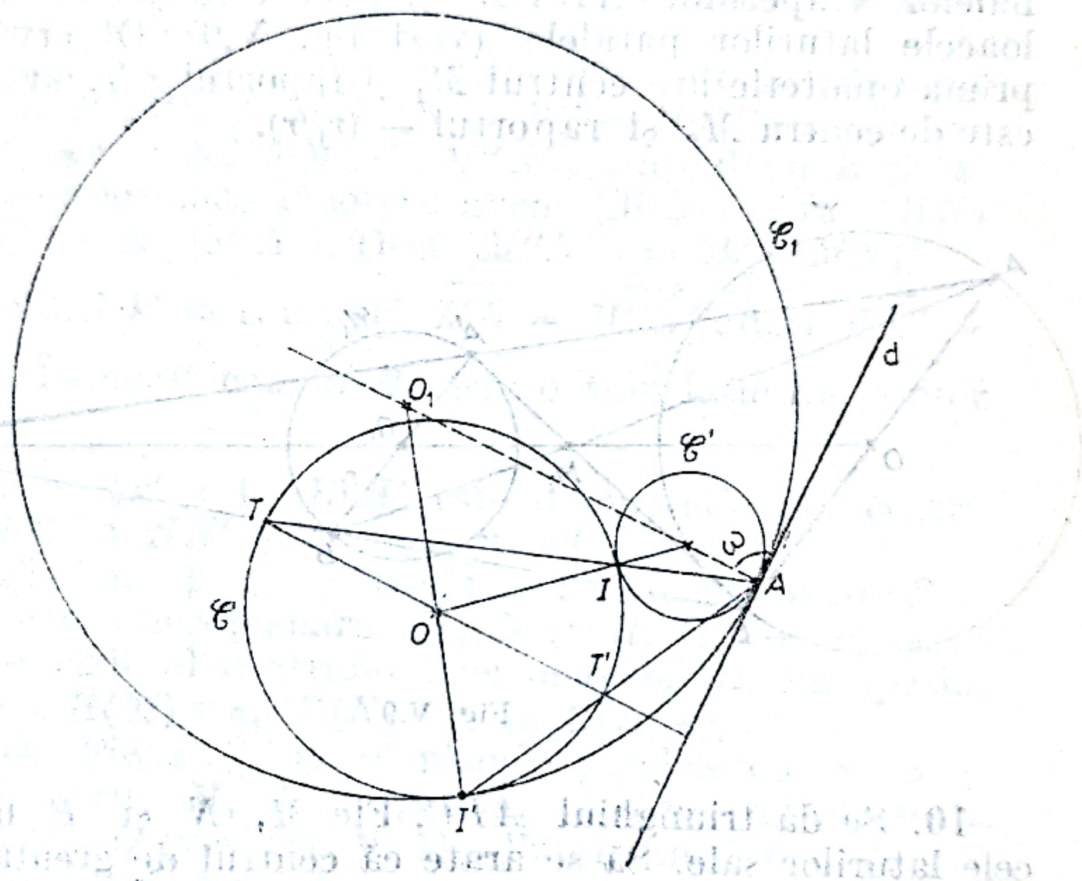


Fig. V.7

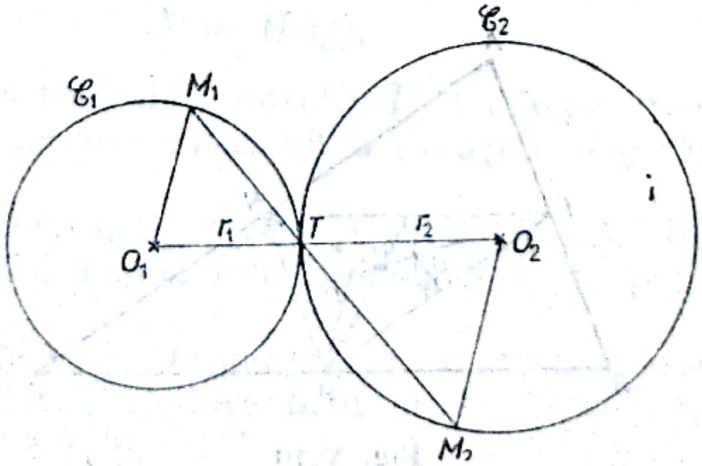


Fig. V.8

9. Se dau cercurile $\mathscr{C}(O, r)$ și $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$. Să se arate că există două omotetii care transformă pe unul în celălalt și să se determine centrele și rapoartele de omotetie respective.

Soluție. Fie $|AB|$ un diametru în $\mathscr{C}(O, r)$ și $A'B'$ un diametru în $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$; $|AB| \parallel |A'B'|$. Notăm $AA' \cap BB' = \{M_1\}$ și $AB' \cap A'B = \{M_2\}$. Presupunînd $r > r_1$ rezultă că O și O_1 se găsesc pe mediana $|M_1O|$ a triunghiului AM_1B. Punctul M_2 este intersecția diagonalelor trapezului $ABA'B'$ și deci este coliniar cu mijloacele laturilor paralele (vezi fig. V.9). Observăm că prima omotetie are centrul M_1 și raportul r_1/r, iar a doua este de centru M_2 și raportul $-(r_1/r)$.

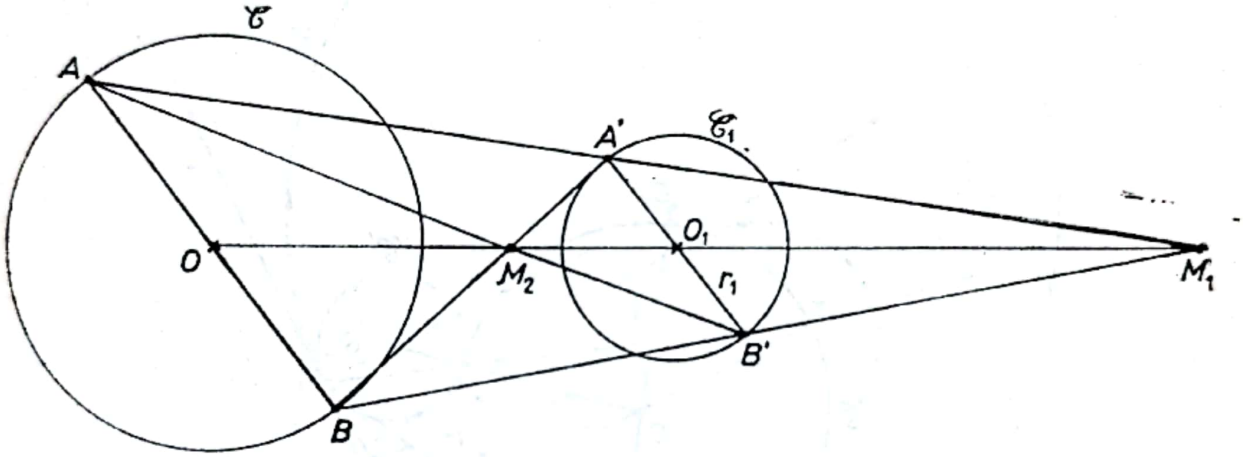


Fig. V.9

10. Se dă triunghiul ABC. Fie M, N și P mijloacele laturilor sale. Să se arate că centrul de greutate G, centrul O al cercului înscris în triunghiul ABC și centrul

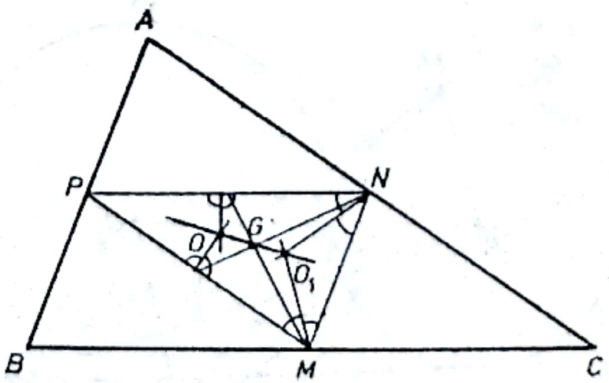


Fig. V.10

O_1 al cercului înscris în triunghiul MNP sînt trei puncte coliniare, iar $|GO| = 2\ |GO_1|$.

Indicație. Triunghiul MNP este transformatul triunghiului ABC în omotetia de centru G și raport $-1/2$. Știm că printr-o omotetie bisectoarea unui unghi se transformă în bisectoarea unghiului transformat (vezi fig. V.10), de unde rezultă și concluzia problemei.

11. Fie în planul π, H și H' două omotetii de centru $\mathscr{C}$, respectiv, $\mathscr{C}'$. Să se arate că $H \circ H'$ este o omotetie sau o translație, după cum produsul rapoartelor celor două omotetii este diferit de 1 sau egal cu 1.

Soluție. Fie M și N două puncte distincte ale planului π și $M' = H'(M)$, $N' = H'(N)$, $M'' = H(M')$ și $N'' = H(N')$. Avem $MN \parallel M'N' \parallel M''N''$. Notînd cu k și k' rapoartele celor două omotetii avem $|M'N'| = k' \cdot |MN|$ și $|M''N''| = k \cdot |M'N'|$. Deci $|M''N''| = kk' \cdot |MN|$.

a) Dacă $k\,k' = 1$, atunci $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{M''N''}$, deci $\overrightarrow{MM'} \sim \overrightarrow{MN'}$. În acest caz $H \circ H'$ este o translație de vector $\overrightarrow{MM'}$.

b) Dacă $kk' \neq 1$, $H \circ H'$ este o omotetie de centru $\{C\} = MM' \cap NN'$ și de raport kk'.

12. Fie α, β și γ trei plane concurente în P și fie trei puncte necoplanare M, N și R. Să se găsească locul geometric al centrului unei omotetii H din spațiu, astfel încît $H(M) \in \alpha$, $H(N) \in \beta$ și $H(R) \in \gamma$.

Soluție. Fie α', β' și γ' planele paralele cu α, β și γ care trec prin M, N, respectiv, R și se vor intersecta într-un punct Q (vezi fig. V. 11). Paralelismul se păstrează printr-o omotetie așa că avem

$$\alpha = H(\alpha'),\ \beta = H(\beta'),\ \gamma = H(\gamma') \text{ și}$$
$$P = H(Q).$$

Rezultă că centrul de omotetie H va fi pe dreapta PQ. Deci locul geometric căutat va fi dreapta PQ fără punctele P și Q.

13. Se dau cercurile $\mathscr{C}_1(C, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(D, r_2)$. Să se precizeze centrele și rapoartele omotetiilor H pentru care $H(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

Indicație. Fie $C \neq D$; centrele O și O' și rapoartele k și k' ale omotetiilor sînt date prin $|OC|/|OD| = r_1/r_2 = k$; $O'C|/|O'D| = -r_1/r_2 = k'$.

Scanned with OKEN Scanner

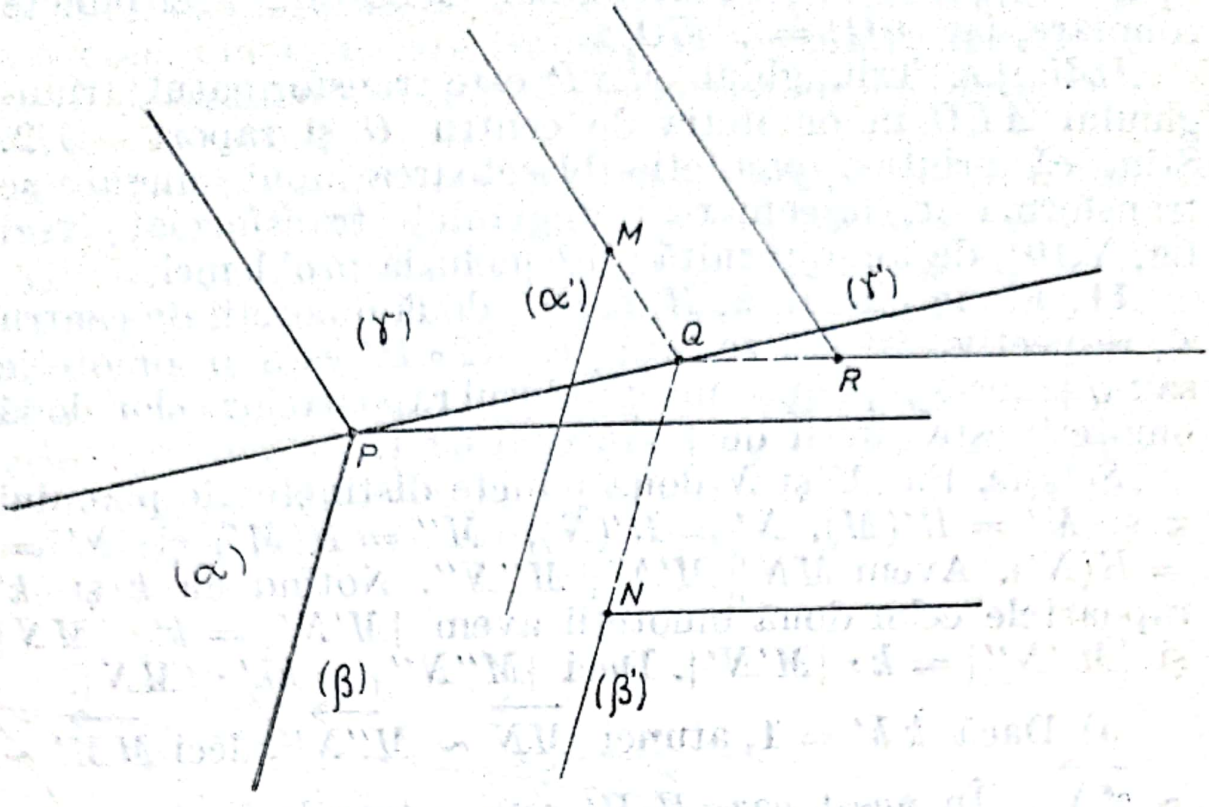


Fig. V.11

14. Fie ABC un triunghi oarecare avînd vîrful A mobil pe o dreaptă d, iar vîrfurile B și C fixe. Să se afle locul geometric al centrului de greutate G.

Indicație. Locul geometric al lui G este omotetica dreptei date d în omotetia de centru M (mijlocul lui BC) și raport 1/3 (vezi fig. V.12).

15. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri cu laturile paralele două cîte două. Să se arate că există o omotetie

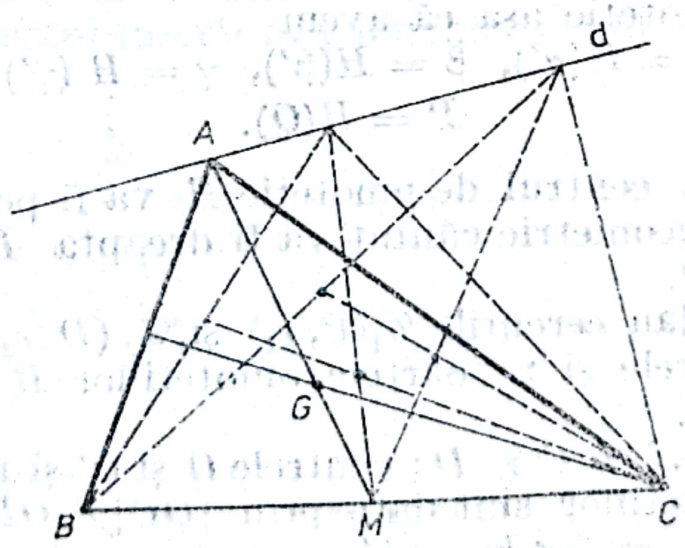


Fig. V.12

H astfel încît să avem $H(A) = A'$, $H(B) = B'$ și $H(C) = C'$.

Soluție. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt omotetice în omotetia al cărei centru este punctul de intersecție al dreptelor AA', BB' și CC' și al cărei raport de omotetie este egal cu $|AB| / |A'B'| = |BC| / |B'C'| = |CA| / |C'A'|$ (vezi fig. V.13).

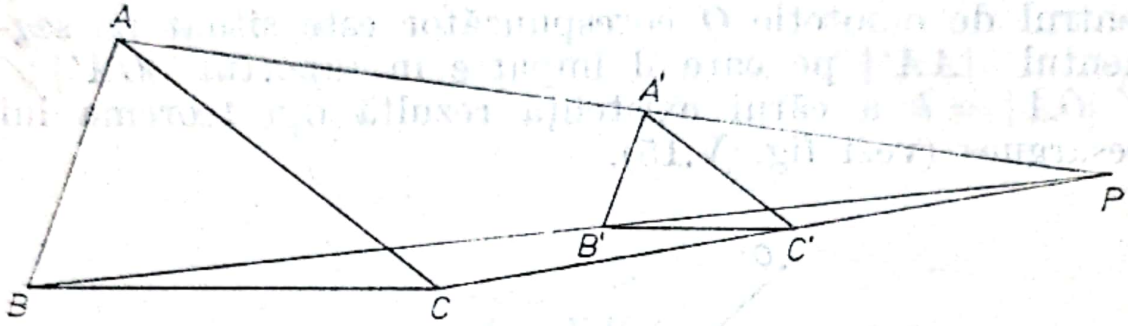


Fig. V.13

16. Fie dreprele $d_1 \parallel d_2$ și punctul fix O exterior dreptelor date. Prin O se duce o secantă variabilă care taie pe d_1 și d_2 în A, respectiv, A'. În A' se ridică o perpendiculară pe dreapta OA' și se consideră pe ea segmentele $|A'M| \equiv |OA|$. Să se afle locul geometric al punctului M.

Soluție. Avem $|OA'| / |A'M| = |OA'| / |OA| = \text{const}$.

Deci măs $(\widehat{MOA}) = \text{const}$ și $|OM| / |OA'| = \text{const}$ (vezi fig. V.14). Rezultă că M se obține din A' printr-o omotetie de centru O urmată de o rotație de același

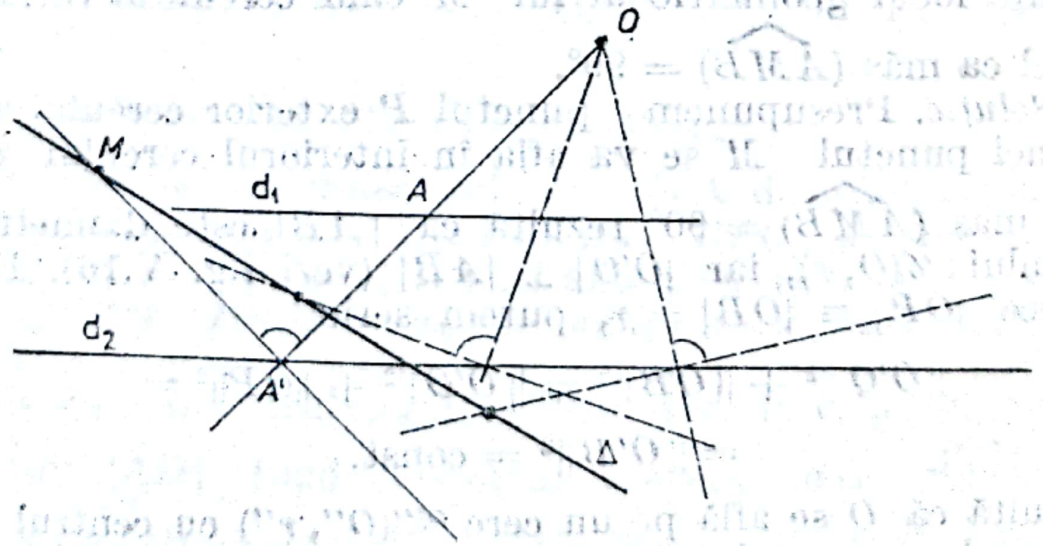


Fig. V.14

centru. Locul lui M este o dreaptă pe care o notăm cu Δ.

17. Să se afle locul geometric al centrului unei omotetii al cărei raport este dat, știind că omotetica unei drepte date d_1 taie o altă dreaptă d_2 într-un punct fix.

Soluție. Presupunem că dreapta care corespunde dreptei d_1 în una dintre omotetiile considerate taie a doua dreaptă dată d_2 într-un punct A'. Fie $A \in d_1$ punctul ce-i corespunde lui A' în omotetia dată. În acest caz centrul de omotetie O corespunzător este situat pe segmentul $|AA'|$ pe care îl împarte în raportul $|OA'| \diagup\!\diagup |OA| = k$ a cărui existență rezultă din teorema lui Desargues (vezi fig. V.15).

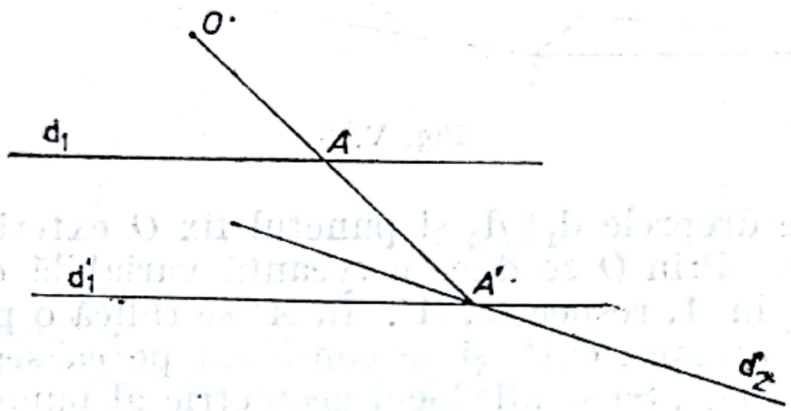


Fig. V.15

18. Un cerc variabil $\mathscr{C}(O, r)$ trece printr-un punct fix P și taie un cerc fix $\mathscr{C}'(O', r')$ în punctele A și B. Se consideră un punct M diametral opus lui P, $P \in \mathscr{C}$. Să se afle locul geometric al lui M când cercul $\mathscr{C}$ variază astfel ca măs $(\widehat{AMB}) = 90°$.

Soluție. Presupunem punctul P exterior cercului $\mathscr{C}'$. Atunci punctul M se va afla în interiorul cercului $\mathscr{C}'$. Din măs $(\widehat{AMB}) = 90°$ rezultă că $|AB|$ este diametrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$, iar $|O'O| \perp |AB|$ (vezi fig. V.16). Deoarece $|OP| \equiv |OB| = r$, putem scrie

$$\|O'O\|^2 + \|OB\|^2 = \|O'O\|^2 + \|OP\|^2 =$$

$$= \|O'B\|^2 = \text{const.}$$

Rezultă că O se află pe un cerc $\mathscr{C}''(O'', r'')$ cu centrul în mijlocul segmentului $|O'P|$. Cum $O \in |AB|$, rezultă că

locul geometric al lui O este intersecţia dintre cercul $\mathscr{C}''$ şi interiorul cercului $\mathscr{C}'$, reprezentînd un arc de cerc sau chiar un cerc.

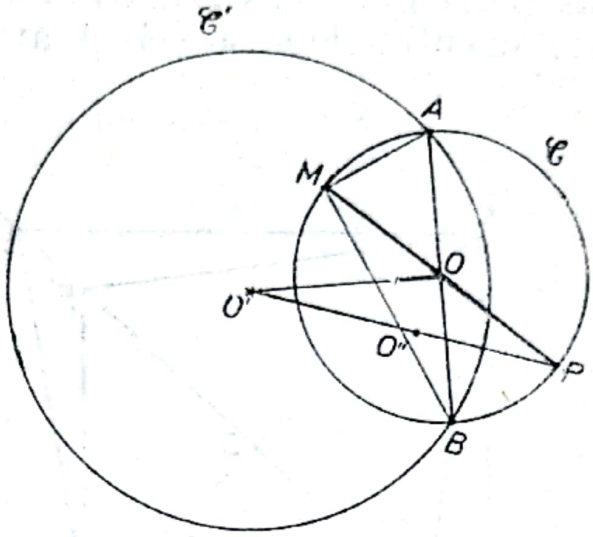


Fig. V.16

Punctul M fiind omoteticul punctului O în omotetia de centru P şi raport 2, rezultă că locul geometric al lui este transformatul lui O în omotetia $H(P,2)$, adică un arc de cerc făcînd parte dintr-un cerc cu centrul în O', deoarece omoteticul lui O'' prin omotetia dată este O'. Pentru ca problema să aibă soluţie trebuie ca distanţa maximă a lui P faţă de O' să fie $\|O'P\| = \|O'O\| + \|OP\|$. Dacă $P \in \mathscr{C}'$, atunci locul geometricu al lui M este cercul $\mathscr{C}'$

19. În triunghiul dreptunghic ABC $(\hat{A} = 90°)$ construim bisectoarea unghiului A care întîlneşte pe $|BC|$ în D. Prin D construim perpendiculara pe $|BC|$ care intersectează pe $|AB|$ în E şi pe $|AC|$ în F. Să se arate că :

a) $|BD| \equiv |DF|$ şi $|CD| \equiv |DE|$;

b) Simetricul punctului E faţă de $|BC|$ se află pe cercul circumscris triunghiului BFC şi simetricul punctului F faţă de $|BC|$ se află pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt congruente.

Soluţie. a) Patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil. Segmentul $|AD|$ fiind bisectoare avem măs $(\widehat{FAD}) =$ $=$măs $(\widehat{BAD}) = 45°$ (vezi fig. V.17). Rezultă că $|DB| \equiv |DF|$.

Scanned with OKEN Scanner

Patrulaterul $ADCE$ este inscriptibil deoarece segmentul $|BC|$ se vede sub un unghi de 90° din A și din D. Rezultă că măs $(\widehat{DAC})$ = măs $(\widehat{DEC}) = 45°$, deci triunghiul DEC este dreptunghic isoscel și atunci $|CD| \equiv |DE|$.

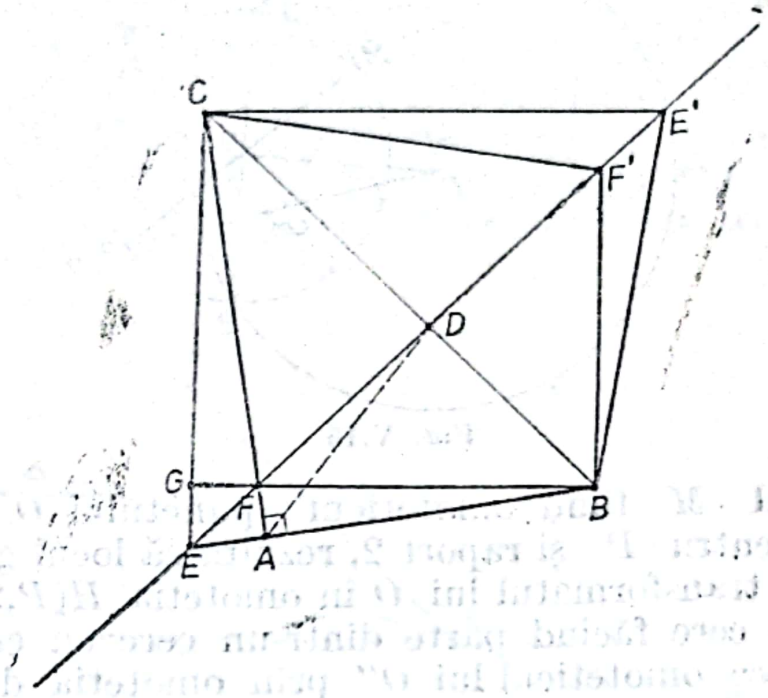


Fig. V.17

b) Din $|AC| \perp |BE|$ și $|ED| \perp |BC|$ rezultă că punctul F este ortocentrul triunghiului BEC. Punctul F' fiind simetricul ortocentrului F față de $|BC|$, el se va afla pe cercul circumscris triunghiului BEC. Datorită simetriei lui F și F' față de $|BC|$, măs $(\widehat{BFC})$ = măs $(\widehat{BF'C})$; dar $\widehat{BFC} \equiv \widehat{AFG}$ ca opuse la vîrf. Din măs (AFG) + + măs $(\widehat{AEG}) = 180°$ (patrulaterul $AFGE$ este inscriptibil), rezultă că măs $(\widehat{AEG})$ + măs $(\widehat{BF'C}) = 180°$, deci $CEBF'$ este inscriptibil și prin urmare F' se află pe cercul circumscris triunghiului CEB.

Triunghiurile CEB și $CE'B$ fiind simetrice față de $|BC|$ sînt congruente. Punctul F', simetricul lui F, este ortocentrul triunghiului $CE'B$. Dar F fiind la rîndul său simetricul ortocentrului F' al triunghiului $CE'B$ se va afla pe cercul circumscris acestui triunghi, de unde rezultă că și patrulaterul $CFBE'$ este inscriptibil, deci

E' se află pe cercul circumscris triunghiului CFB. Din congruența triunghiurilor CEB și $CE'B$ rezultă congruența cercurilor circumscrise lor.

20. Se dă trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$ având punctele A și B fixe, $\|AB\| = a$, $\|CD\| = b$. Punctul O de intersecție al diagonalelor descrie cercul $\mathscr{C}(O', r)$, cu $O' \in |AB|$, astfel încît $\|O'A\| / \|O'B\| = b/a$. Să se determine locurile geometrice descrise de punctele C și D.

Soluție. Din $\Delta COD \sim \Delta AOB$ avem

$$\frac{\|OC\|}{\|OA\|} = \frac{\|CD\|}{\|AB\|}, \quad \frac{\|OA\| + \|OC\|}{\|OA\|} = \frac{\|AB\| + \|CD\|}{\|AB\|},$$

de unde $\dfrac{\|AC\|}{\|OA\|} = 1 + \dfrac{\|CD\|}{\|AB\|} = 1 + \dfrac{b}{a}$.

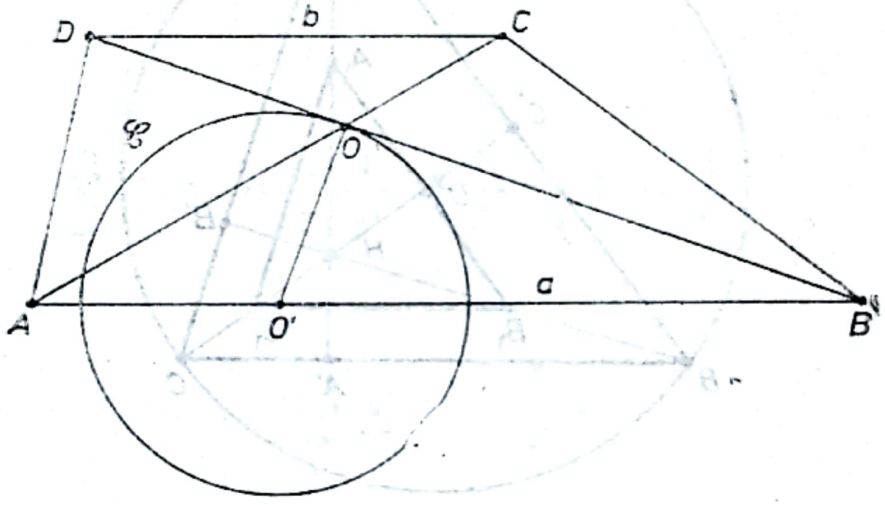


Fig. V.18

Rezultă că punctul C este transformatul punctului O în omotetia de centru A și raport $1 + b/a$ (vezi fig. V.18). Conform ipotezei, O descrie cercul $\mathscr{C}(O, r)$; rezultă că transformatul său, adică C, va descrie un cerc omotetic cu cercul $\mathscr{C}$. În mod asemănător rezultă că punctul D este transformatul punctului O în omotetia de centru B și raport $1 + b/a$. Prin urmare D va descrie un cerc omotetic cu cercul $\mathscr{C}$ prin omotetia de centru B și raport $1 + b/a$. Se observă că cercul descris de punctul D are centrul în punctul A deoarece $\|BA\| / \|BO'\| = 1 + b/a$. Deci punctul A este transformatul centrului O' al cercului $\mathscr{C}$ prin omotetia de centru B și raport $1 + b/a$.

Scanned with OKEN Scanner

21. Fie cercul $\mathscr{C}(O,R)$ de arie S, circumscris triunghiului ABC. Considerăm în triunghiul ABC cercul lui Euler în care înscriem triunghiul $A_1B_1C_1$ cu $AB \| A_1B_1$, $AC \| A_1C_1$ și $BC \| B_1C_1$. Notăm aria acestui cerc cu S_1 și construim cercul lui Euler pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ a cărui arie o notăm cu S_2. Repetăm această operație de k ori. Să se calculeze $\lim_{k\to\infty} S_k$ în funcție de o latură a triunghiului ABC și de unghiul ce i se opune.

Soluție. Notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC și cu A_1, B_1 și C_1, respectiv, mijloacele segmentelor $|AH|$, $|BH|$ și $|CH|$ (vezi fig. V.19 .

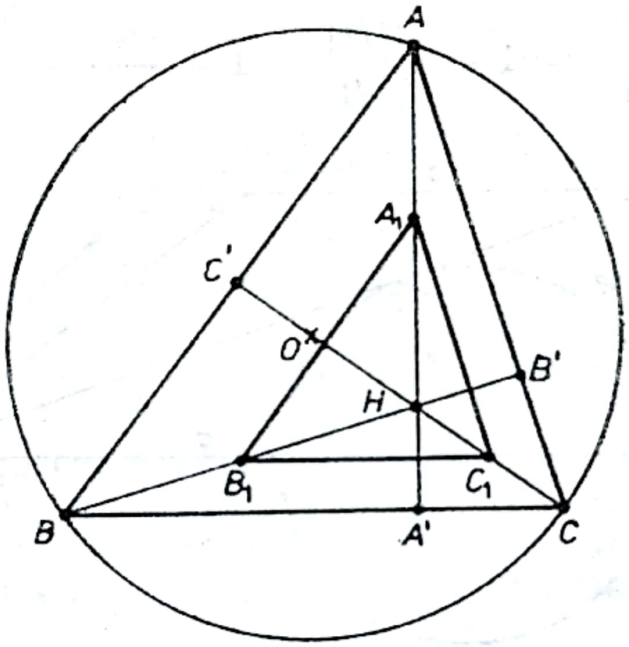


Fig. V.19

Cercul lui Euler al triunghiului ABC fiind omoteticul cercului circumscris triunghiului ABC prin omotetia de centru H și raport 1/2, avem $S_1 = \frac{1}{4} S$. Triunghiul $A_1B_1C_1$ înscris în cercul lui Euler are laturile paralele cu laturile triunghiului ABC și este omoteticul acestuia prin aceeași omotetie de centru H și raport 1/2. În mod analog cercul lui Euler al triunghiului $A_1B_1C_1$ este omoteticul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$, iar triunghiul $A_2B_2C_2$ este omoteticul triunghiului $A_1B_1C_1$

Scanned with OKEN Scanner

prin aceeași omotetie și raționamentul continuă. Au loc egalitățile:

$$S_1 = \frac{1}{4} S;$$

$$S_2 = \frac{1}{4} S_1 + \frac{1}{4^2} S;$$

$$S_3 = \frac{1}{4} S_2 = \frac{1}{4^3} S;$$

. . . . . .

$$S_k = \frac{1}{4^k} S.$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{k} S_i = S \sum_{i=1} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} S \left(1 - \frac{1}{4^k} \right).$$

Deci

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} S_i = \frac{1}{3} S.$$

Notînd cu a lungimea laturii $|BC|$ și cu $\hat{A} = \text{măs } (\hat{A})$ avem $R = \dfrac{a}{2 \sin A}$, deci $S = \pi R^2 = \dfrac{a^2}{4 \sin^2 A}$ și atunci

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} S_i = \frac{\pi a^2}{12 \sin^2 A}.$$

22. Se dă triunghiul ABC dreptunghic cu măs $(\hat{A}) = 90°$, $|BC|$ fixă și vîrful A variabil. Se construiește punctul D simetric cu B față de $|AC|$. În triunghiul BDC se construiește mediana $|DE|$ a laturii $|BC|$. Se notează $\{M\} = DE \cap CA$. Să se afle locul geometric al punctului M în condițiile date.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. În triunghiul BDC, $|ED|$ și $|AC|$ sînt mediane, deci M este centrul de greutate al triunghiului. Ducînd $MQ \| AB$ rezultă $\|QC\| / \|BC\| = \|MC\| / \|AC\| = 2/3$. Rezultă că M este omoteticul lui A în omotetia de centru C și raport $2/3$ (vezi fig. V.20). Cînd vîrful A descrie cercul de centru E și rază $\|BC\|/2$ (mai puțin punctele B și C), punctul M (omoteticul lui A) descrie cercul de diametru $|CQ|$ și rază $\|BC\|/3$ omotetic cu cercul descris de punctul A.

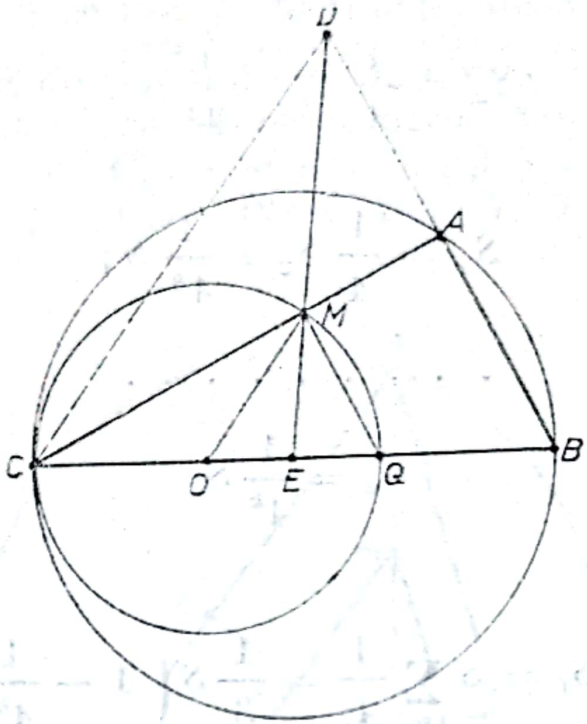


Fig. V.20

3. PROBLEME PROPUSE

1. Să se afle locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat O, care sînt împărțite într-un raport dat de acest punct și de două plane π și π' date.

2. Fie triunghiul ABC și punctele A', B' și C', respectiv, mijloacele segmentelor $|BC|$, $|AC|$ și $|AB|$. Să se găsească omotetia unică H, astfel încît $H(A) = A'$, $H(B) = B'$ și $H(C) = C'$. Să se caracterizeze în raport cu ABC imaginile prin H ale ortocentrului Q și centrului O al cercului circumscris triunghiului ABC.

3. Se dă pentagonul convex P_1 avînd vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Fie P_2, P_3, P_4 și P_5 pentagoanele obținute apli-

cînd lui P_1 translația $A_1 \to A_i$ $(i = 2, 3, 4, 5)$. Să se arate că cel puțin două dintre pentagoanele P_1, P_2, P_3, P_4 și P_5 au puncte interioare comune.

4. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și punctele A, B și C aparținînd cercului dat. Să se construiască o coardă $|AX|$ astfel încît ea să fie împărțită în două părți egale de către coarda $|BC|$.

5. Să se înscrie un pătrat într-un triunghi.

6. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$, un punct variabil $B \in \mathscr{C}$ și un punct fix A, exterior lui $\mathscr{C}$. Să se afle locul geometric al intersecției M dintre dreapta AB și bisectoarea unghiului AOB.

7. Fie H_i omotetia de centru O_i și raport k_i $(i = 1, 2, 3)$. Să se găsească o dreaptă d care să se transforme prin cele trei omotetii date în aceeași dreaptă d.

8. Fie α și β două plane oarecare în spațiu și un punct O care nu aparține nici unuia din cele două plane. Să se găsească locul geometric al dreptei d care trece prin O și ale cărei puncte de intersecție cu cele două plane sînt $\{A\} = d \cap \alpha$, respectiv $\{B\} = d \cap \beta$ și verifică relația $\|OB\| = |k| \cdot \|OA\|$.

9. Să se arate că paralelele duse prin mijloacele laturilor unui triunghi la bisectoarele unghiurilor opuse sînt concurente.

10. Fie pe cercul $\mathscr{C}$ punctele A și B fixe și un punct variabil C. Prin polul Q al coardei $|AB|$ ducem o paralelă la $|AB|$ care întîlnește pe $|CA|$ și $|CB|$, respectiv în M și N. Să se arate că $\|QM\| \cdot \|QN\| = \text{const}$ și că cercul CMN este tangent în punctul C la cercul dat.

11. Trei cercuri de aceeași rază sînt situate în interiorul unui triunghi, fiecare dintre ele fiind tangent la cîte două laturi ale triunghiului. Cele trei cercuri trec toate prin același punct O. Să se demonstreze că punctul O și centrele cercurilor înscrise și circumscrise sînt coliniare.

12. Fie M un punct mobil pe segmentul $|A_1B_1|$. Pe $|MA_1|$ și $|MB_1|$ ca laturi, se construiesc de o parte și de alta a segmentului $|A_1B_1|$ poligoane regulate cu cîte n laturi. Să se arate că transformarea care leagă cele două poligoane este o omotetie ale cărei elemente se vor preciza.

13. Fie xOy un unghi dat și $M \in Ox$ un punct mobil. Pe $|OM|$ ca diametru construim cercul $\mathscr{C}_1$. Construim apoi cercul $\mathscr{C}_2$ tangent la primul și la laturile Ox și Oy. Să

Scanned with OKEN Scanner

se afle locul geometric al punctului de tangență al celor două cercuri.

14. Să se arate că punctul de concurență G al medianelor unui triunghi este situat pe dreapta care unește centrul cercului circumscris cu punctul de intersecție al înălțimilor și împarte acest segment în raportul 1/2.

15. Fie $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ două cercuri situate în două plane paralele și distincte. Să se arate că:

a) Există două omotetii care transformă un cerc în celălalt.

b) Există două omotetii care transformă sfera $S_1(O_1, r_1)$ în sfera $\mathscr{S}_2(O_2, r_2)$.

16. Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ congruente și un punct exterior O. Să se afle:

a) Locul geometric al punctului O care are proprietatea că dacă rotim triunghiul ABC în jurul acestui punct pînă cînd $|AB|$ ajunge în poziția $|A'B'|$ paralelă cu $|A_1C_1|$, noua poziție B' a punctului B se află pe dreapta OC.

b) Locurile geometrice descrise de punctele A', B' și C' ce îndeplinesc condițiile de la punctul a.

17. Să se arate că într-un triunghi ABC în care O este centrul cercului circumscris iar punctul H este ortocentrul, are loc relația

$$\|A\omega\|^2 + \|B\omega\|^2 + \|C\omega\|^2 + \|H\omega\|^2 = 3R^2,$$

unde ω este mijlocul segmentului $|OH|$ iar R este raza cercului circumscris.

Soluții. Indicații

1. Considerăm locul geometric al dreptelor care trec prin punctul dat O și au proprietatea că segmentele acestor drepte cuprinse între planele π și π' sînt împărțite de punctul O într-un raport dat. Se consideră unul dintre aceste segmente ca fiind $|AA'|$ cu $A \in \pi$ iar $A' \in \pi'$ și $\|OA\| / \|OA'\| = k$, k fiind raportul dat, iar A' omoteticul, lui A în omotetia de centru O și raport de omotetie $\|OA'\| / \|OA\| = 1/k$. Din $A \in \pi$ rezultă că $A' \in \pi''$, care este omologul lui A în această omotetie. Dar $A' \in \pi'$ deci $\{A'\} = \pi'' \cap \pi'$. Locul geometric este planul ce trece prin O și prin intersecția planelor π'' și π'.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie $O' = O$; O' este centrul cercului ce trece prin punctele A', B' și C', numit *cercul lui Euler*. Rezultă că $\overrightarrow{QG} = 2\overrightarrow{GO}$ și $\overrightarrow{Q\omega} = \overrightarrow{\omega O}$ (OQ este *dreapta lui Euler*).

3. Aplicînd pentagonului P_1 omotetia H de centru A_1 și raport 2 obținem pentagonul P care este convex și de arie $S = 4S_1$. Fie A_{ij} transformatul lui A_j prin translația $A_1 \to A_i$. Observăm că punctele A_{ij} coincid cu punctele obținute aplicînd punctelor A_i omotetia H (vezi fig. V. 21). Deci $A_iA_j \| A_{ii}A_{jj}$. Conform translației avem

$$A_jA_{ij} \| A_iA_{ii} \text{ și } |A_iA_{ii}| \equiv |A_jA_{ij}| \equiv$$
$$\equiv |A_1A_i|, \quad \text{deci} \quad A_{ii}A_{ij} \| A_iA_j$$

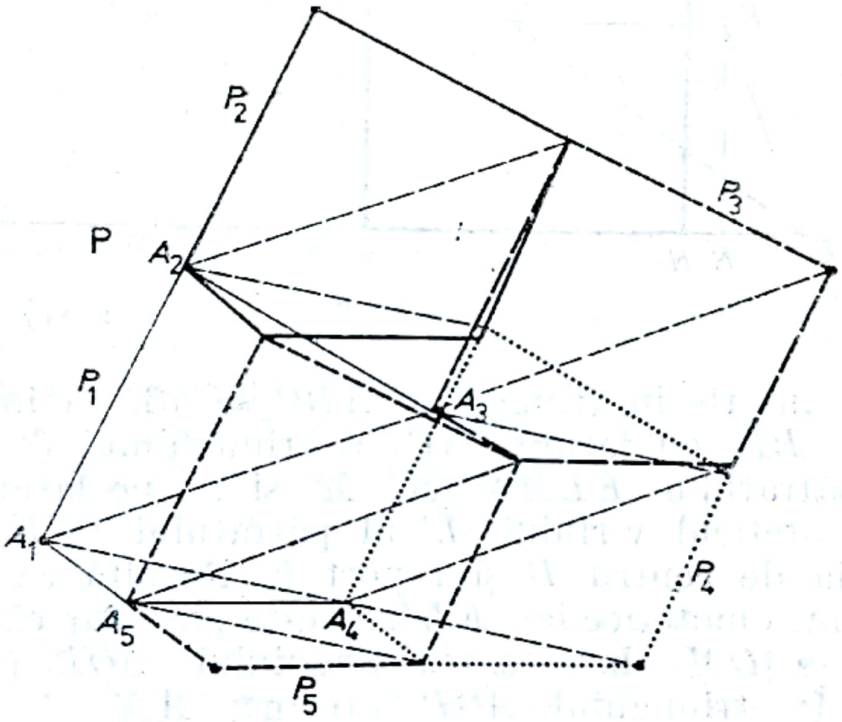


Fig. V.21

și atunci $A_{ij} \in A_{ii}A_{jj}$. Pentagonul P fiind convex conține și segmentul $|A_{ii}A_{jj}|$, deci conține și punctele A_i și A_{ij} pentru că aparțin lui $|A_1A_{ij}|$. Rezultă că toate punctele se găsesc în interiorul lui P sau pe frontieră.

4. Omotetica lui $|BC|$ în omotetia de centru A și raport $k = 2$ intersectează cercul în punctul căutat.

5. Fie triunghiul ABC iar $K \in |AB|$ și $L \in |AC|$ două vîrfuri ale pătratului $KLMN$ căutat, avînd celelalte două vîrfuri pe latura $|BC|$ (vezi fig. V. 22). Considerăm pătratul omotetic cu cel căutat luînd ca centru de omo-

Scanned with OKEN Scanner

tetie vîrful B și K' omoteticul lui K, $K \in |AB|$, rezultă $K' \in |AB|$). Acest pătrat are ca latură perpendiculara $|K'N'|$ din punctul K' pe BC. Pătratul căutat va ocupa una din poziţiile posibile astfel ca vîrful L să aparţină lui $|AC|$. Vîrful notat cu L al pătratului căutat

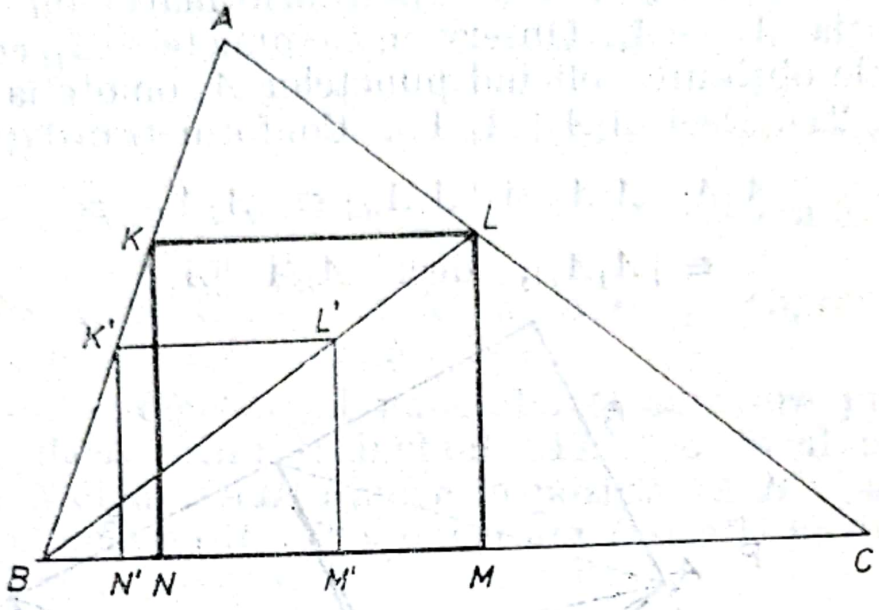


Fig. V.22

$KLMN$ înscris în triunghiul ABC se află la intersecţia dreptei BL' cu latura $|AC|$ a triunghiului dat. Vîrful L al pătratului $KLMN$ (cu M și N pe latura $|BC|$) este omoteticul vîrfului L' al pătratului $K'L'M'N'$ în omotetia de centru B și raport k. Rezultă că patrulaterele sînt omotetice iar $KLMN$ este pătratul căutat.

6. Fie $|OM|$ bisectoarea unghiului AOB (vezi fig. V.23). În triunghiul AOB avem $\|AM\|/\|MB\| =$

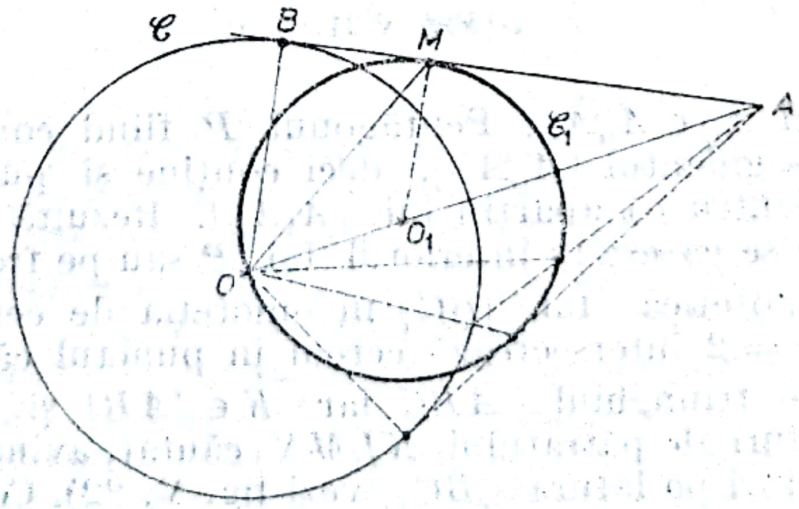


Fig. V.23

$= \|OA\| / \|OB\|$ și deci $\|AM\| / \|AB\| = \|OA\| / (\|OA\| + \|OB\|) = \text{const}$. Deci M este omoteticul lui B. Rezultă că locul geometric al punctului M, omoteticul punctului B, este un cerc $\mathscr{C}_1$, omotetic cu cercul dat.

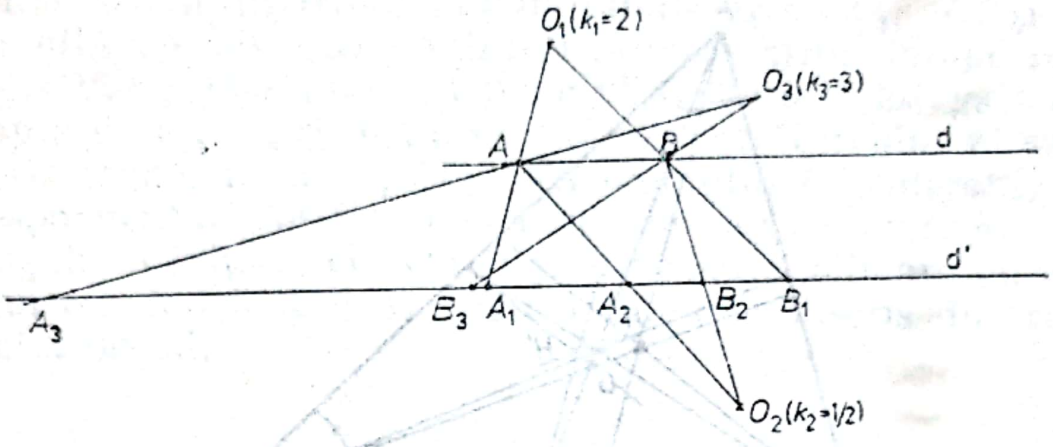


Fig. V.24

7. Notăm cu H'_i omotetia de centru O_i și raport $k'_i = \dfrac{1}{k_i}$ (vezi fig. V.24). Vom avea $H'_2 \circ H_1(\mathrm{d}) = \mathrm{d}$ și deci dreapta d trece prin centrul omotetiei $H'_2 \circ H'_1$ notată cu A. Dar dreapta d trece prin centrul B al omotetiei compuse $H'_3 \circ H_1$, deci d este determinată de punctele A și B. Dacă transformările $H'_2 \circ H'_1$ și $H'_3 \circ H'_1$ sînt translații avem o infinitate de soluții.

8. Considerăm omotetia $H(O, k)$. Imaginea lui α prin această omotetie este $\alpha' = H(\alpha)$. Rezultă dreapta $\{\mathrm{d}'\} = \beta \cap \alpha'$ și locul geometric al dreptelor d este planul determinat de punctul O și dreapta d'.

9. Aplicăm figurii formate de triunghiul ABC și bisectoare, omotetia de centru G și raport $k = -1/2$. Triunghiul ABC se transformă în $A'B'C'$ (vezi fig. V. 25), bisectoarele în drepte, respectiv, paralele, care vor fi concurente în omoteticul punctului de concurență.

10. Tangentele $|QA|$ și $|QB|$ la cercul dat formează unghiuri congruente cu $|AB|$ (vezi fig. V. 26). Deoarece $|AB| \equiv |MN|$ rezultă că avem $\widehat{AQM} \equiv \widehat{BQN}$ și $\widehat{QAM} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{AC}/2$. Cum $\widehat{QNB} \equiv \widehat{ABC}$ ca unghiuri corespondente, rezultă că $\widehat{QAM} = \widehat{QNB}$ și atunci triunghiurile

QAM și QNB sînt asemenea, de unde conchidem că $\|QM\| \cdot \|QN\| = \|QA\| \cdot \|QB\|$ ($|QA| \equiv |QB|$ ca tangente duse din același punct la cerc). Rezultă că $\|QM\| \cdot \|QN\| = \|QA\|^2$. Triunghiurile CAB și CMN sînt omo-

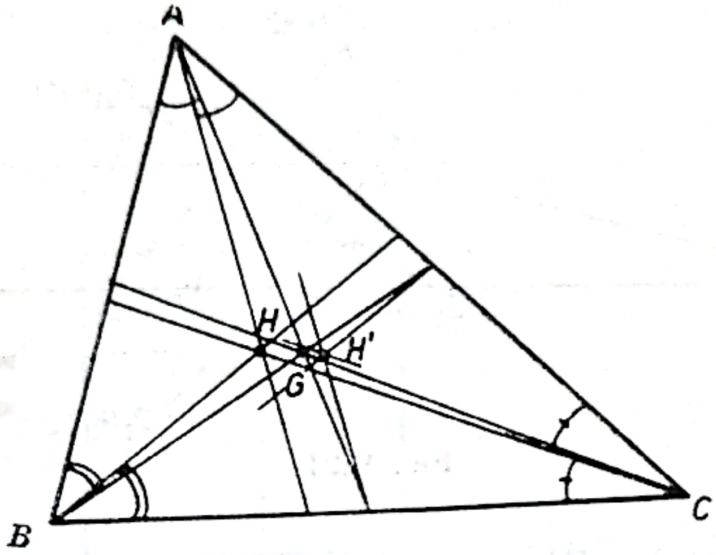


Fig. V.25

tetice în omotetia de centru C și raport $k = \|CA\| / \|CM\|$. Prin urmare cercurile $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}'$ circumscrise triunghiurilor CAB și CMN sînt omotetice în aceeași omotetie și deci sînt tangente în punctul C.

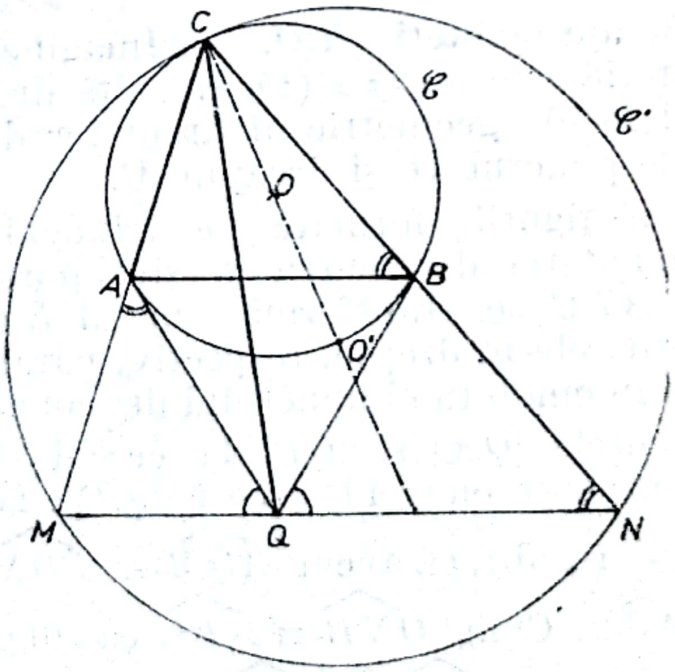


Fig. V.26

11. Fie C_1, C_2 și C_3 centrele celor trei cercuri. Avînd razele congruente rezultă că $|C_1C_2|$, $|C_2C_3|$ și $|C_3C_1|$ sînt paralele, respectiv, cu laturile triunghiului. Triunghiul inițial și triunghiul $C_1C_2C_3$ se obțin unul din altul printr-o omotetie H. Centrul omotetiei este centrul cercului înscris în triunghiul inițial deoarece C_1, C_2 și C_3 se află pe bisectoarele interioare ale triunghiului (vezi fig. V.27). Observăm că punctul O se află la egală distanță de C_1, C_2 și C_3, deci este centrul cercului circumscris triunghiului $C_1C_2C_3$. În omotetia considerată, corespondentul său va fi centrul cercului circumscris triunghiului inițial; ele vor fi prin urmare coliniare cu centrul omotetiei, deci cu centrul cercului înscris în triunghiul inițial.

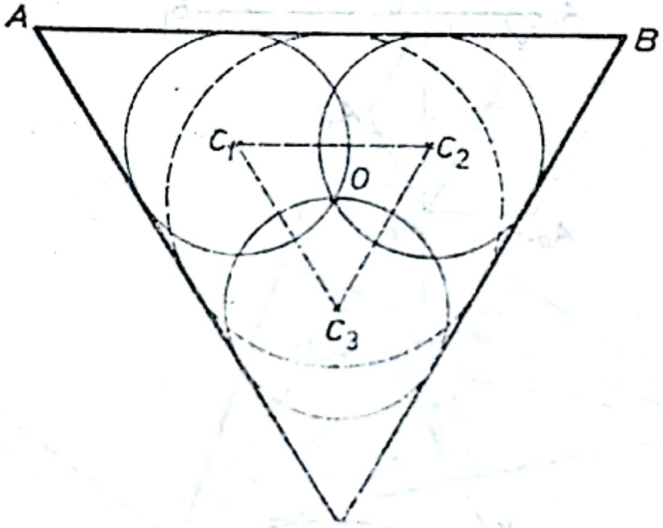


Fig. V.27

12. Fie A_p și B_p vîrfurile omoloage de ordin p începînd de la A_1, respectiv, B_1, în sensuri diferite, ale celor două poligoane (vezi fig. V. 28). Poligoanele (A_p) și (B_p) fiind asemenea, dreptele omoloage MA_p și MB_p fac unghiuri congruente cu A_1B_1, adică sînt în prelungire, iar A_p și B_p sînt situate pe dreapta d ce trece prin M. Din $\Delta A_1MA_p \sim \Delta B_1MB_p$ avem $\|MA_p\|/\|MB_p\| = \|MA_1\|/\|MB_1\|$ și deducem că laturile omoloage sînt paralele, adică (A_p) și (B_p) sînt omotetice prin omotetia de centru M și raport $\|MA_1\|/\|MB_1\|$.

13. Dacă punctul M își schimbă poziția întreaga figură rămîne asemenea cu ea însăși în raport cu centrul

Scanned with OKEN Scanner

de omotetie O (vezi fig. V. 29). Deci punctul de contact se deplasează pe o dreaptă d care trece prin centrul de omotetie O. Dreapta d este locul geometric căutat.

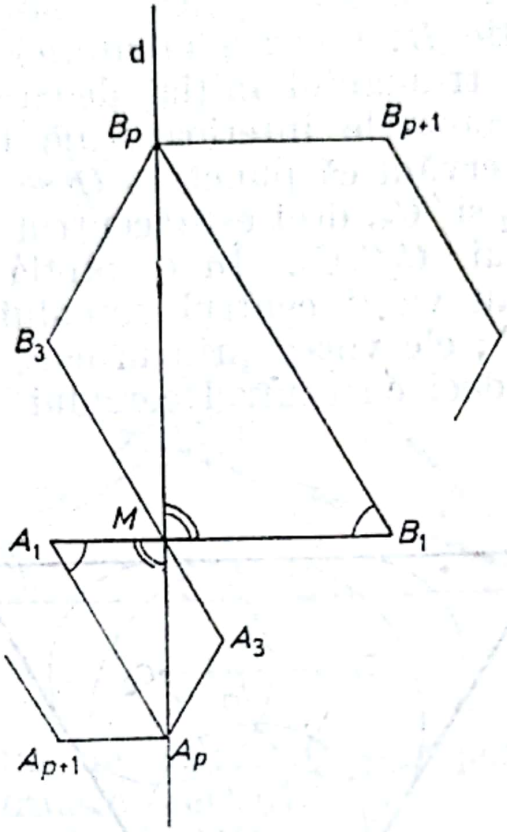


Fig. V.28

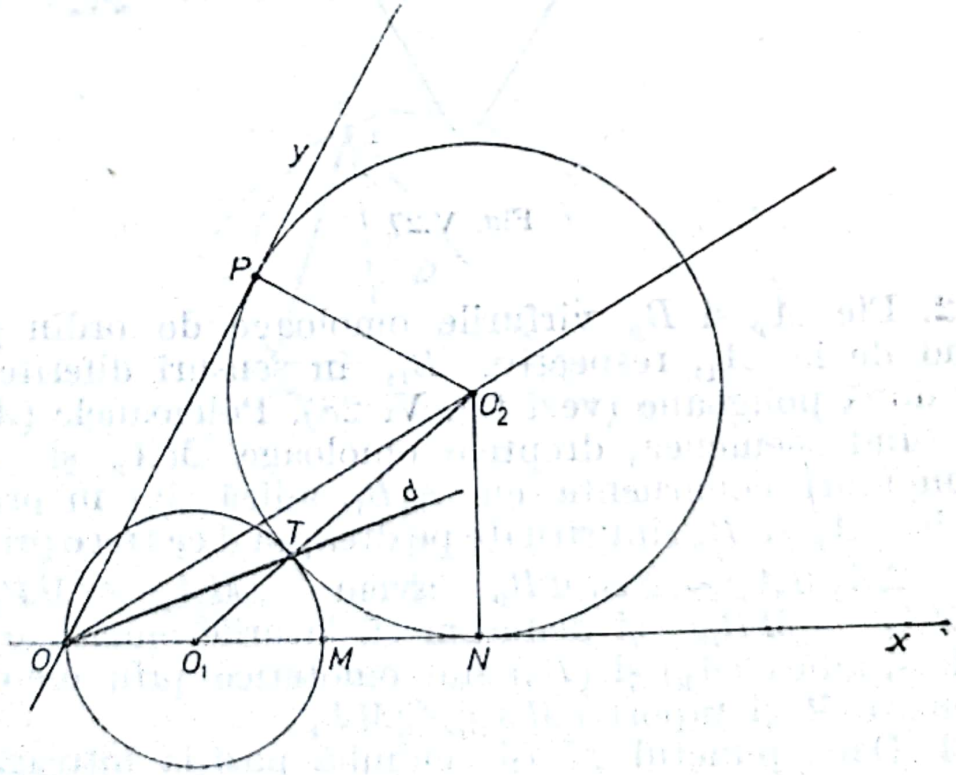


Fig. V.29

14. Fie ABC triunghiul dat, G punctul de concurenţă al medianelor, H al înălţimilor, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi $A'B'C'$ triunghiul ale cărui laturi trec, respectiv, prin A, B, C şi sînt paralele, respectiv, cu BC, AC şi AB. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sînt omotetice avînd laturile $|A'B'|$ şi $|A'C'|$, respectiv, paralele cu $|AB|$ şi $|AC|$ şi de două ori mai mari decît acestea. Segmentele $|AA'|$, $|BB'|$ şi $|CC'|$ sînt medianele triunghiului ABC, deci centrul de asemănare este G. Centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC şi centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, adică punctul H de concurenţă al înălţimilor triunghiului ABC, sînt două puncte omotetice (vezi fig. V.30.). Deci $|OH|$ trece prin G şi este împărţit de punctul G în raportul 1/2.

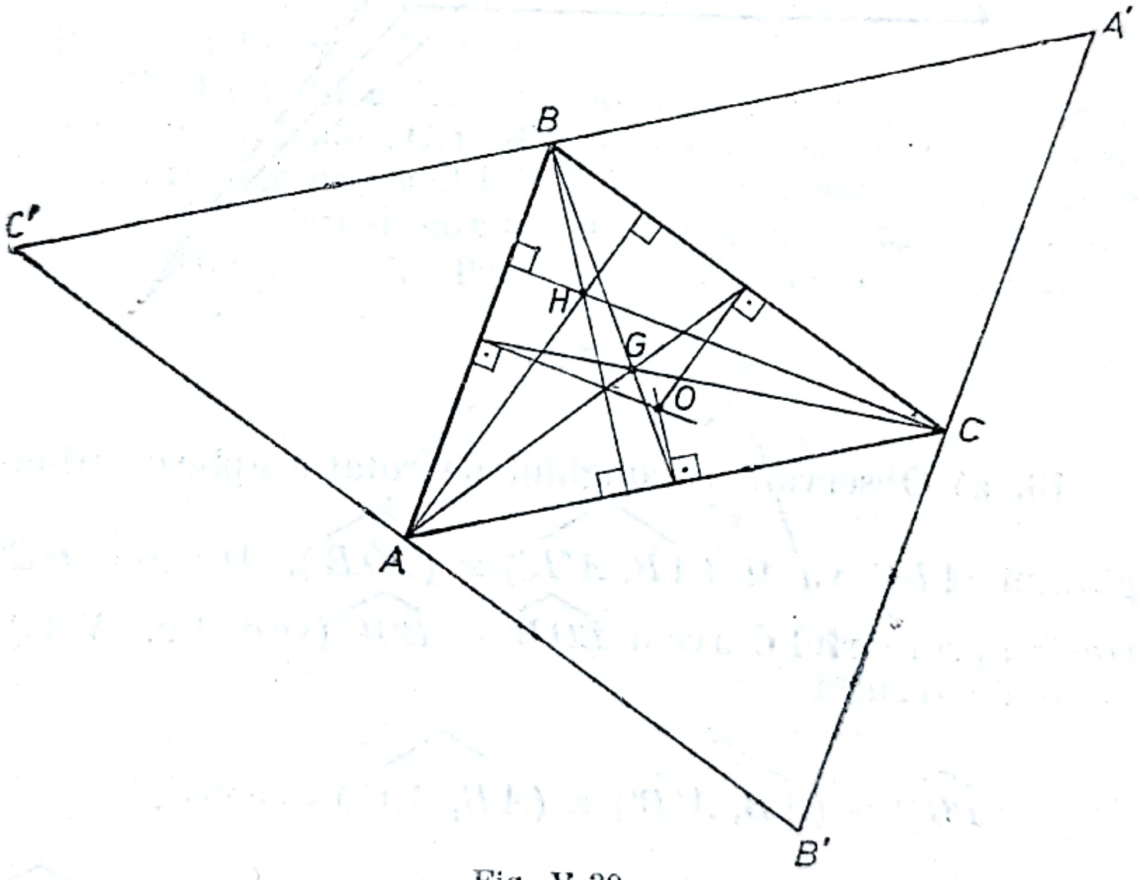


Fig. V.30

15. a) Razele celor două cercuri fiind r_1, respectiv, r_2, $r_1 \neq r_2$, atunci rapoartele de omotetie vor fi $k_1 = r_1/r_2$ şi $k_2 = -r_1/r_2$, iar centrele lor sînt situate pe dreapta ce trece prin centrele cercurilor.

Scanned with OKEN Scanner

b) Se consideră două cercuri situate în două plane paralele care trec prin centrele sferelor (vezi fig. V.31).

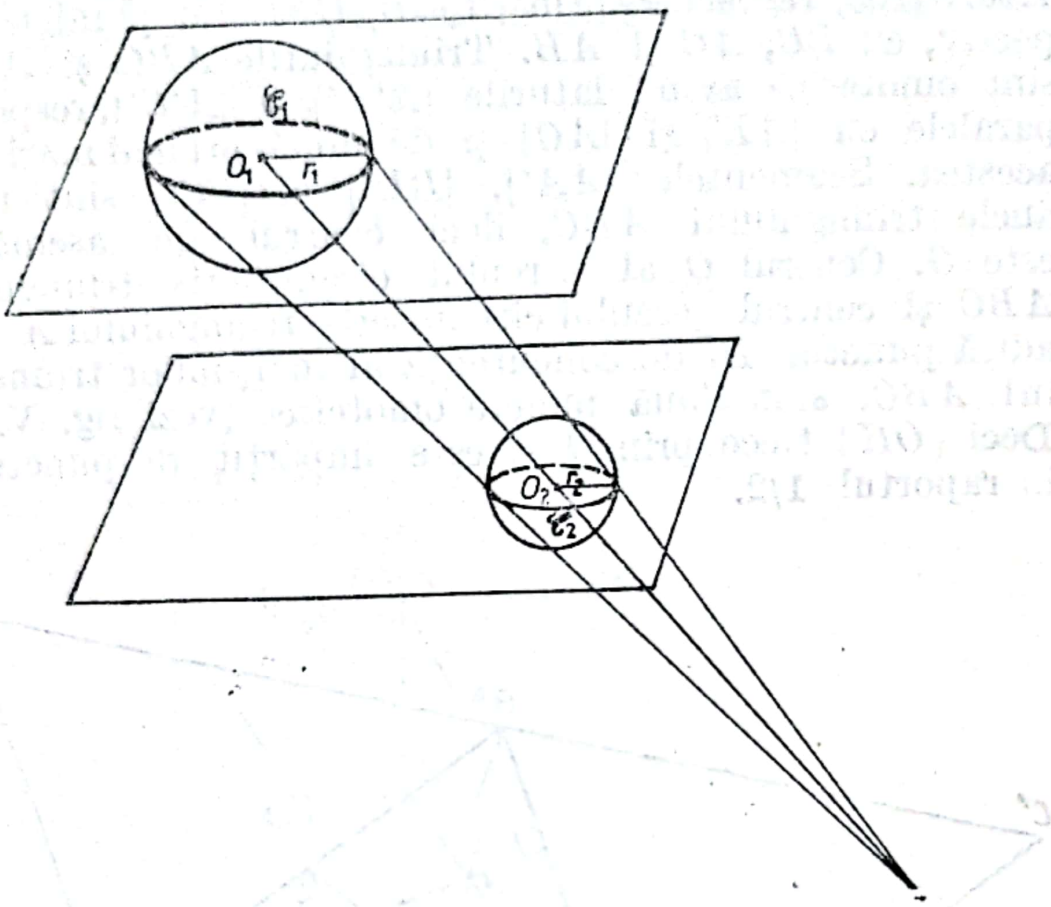


Fig. V.31

16. a) Observăm că unghiul de rotație aplicat triunghiului ABC va fi $(\widehat{AB, A'B'}) \equiv (\widehat{BOB'})$. Dreapta OB' trecînd prin vîrful C avem $\widehat{BOB'} \equiv \widehat{BOC}$ (vezi fig. V.32), de unde rezultă

$$\widehat{BOC} \equiv (\widehat{AB, A'B'}) \equiv (\widehat{AB, A_1C_1}) = \text{const.}$$

b) Cînd punctul O descrie acest cerc, unghiul $\widehat{OAA'}$ și raportul $\|OA\|/\|AA'\|$ rămîn constante deoarece și $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOC}$ sînt constante. Deci locul geometric al punctelor A' este un cerc omotetic cu cercul descris de punctul O prin omotetia de centru A, căruia i se aplică

Scanned with OKEN Scanner

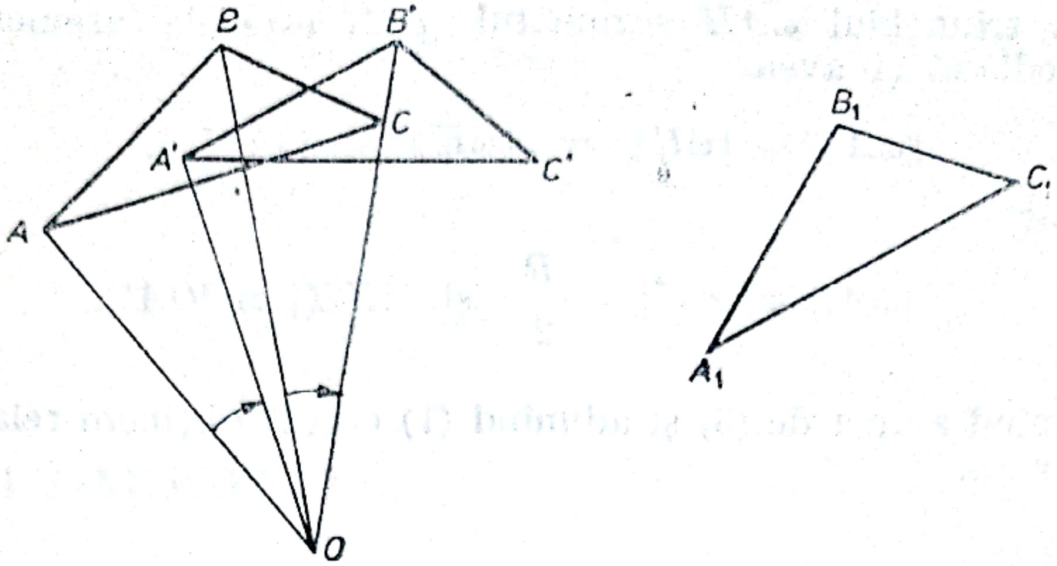


Fig. V.32

o rotaţie de unghi AOA'. Raţionamentul este analog pentru punctele B' şi C'.

17. Punctul ω fiind mijlocul lui $|OH|$, el este centrul cercului lui Euler. Cercul cu centrul în ω trece prin punctul A', care este mijlocul lui $|BC|$, şi prin punctul K, mijlocul lui $|AH|$. Cercul circumscris şi cercul lui Euler au ca centru de omotetie pe H şi atunci avem $|OA'| \equiv |KH|$ (vezi fig. V.33).

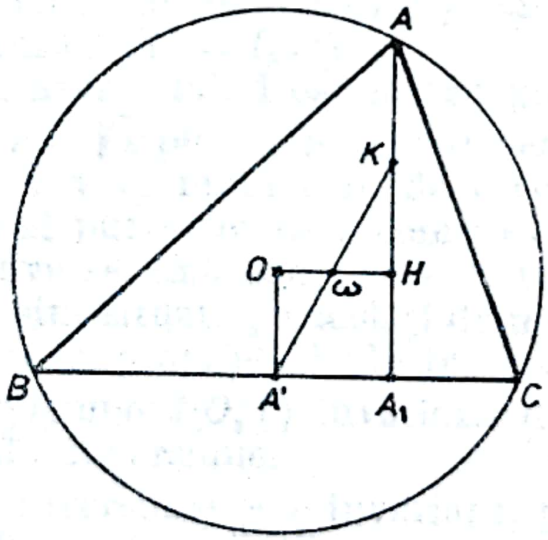


Fig. V.33

În triunghiul ωBC, segmentul $|\omega A'|$ este mediană şi avem

$$\|\omega B\|^2 + \|\omega C\|^2 = 2\|\omega A'\|^2 + 2\|BA'\|^2. \qquad (1)$$

În triunghiul ωAH segmentul $|\omega K|$ este de asemenea mediană şi avem

$$\|\omega A\|^2 + \|\omega H\|^2 = 2\|\omega K\|^2 + 2\|KH\|^2. \qquad (2)$$

Dar

$$|\omega A'| \equiv |\omega K| = \frac{R}{2} \quad \text{şi} \quad |KH| \equiv |OA'|. \qquad (3)$$

Ţinînd seama de (3) şi adunînd (1) cu (2) obţinem relaţia cerută.

1 INVERSIUNEA

Fie O un punct în planul E^2 şi k un număr real nenul. Se numeşte *inversiune* de pol O şi putere k transformarea $I : E^2 \setminus \{O\} \to E^2 \setminus \{O\}$ care asociază oricărui punct $M \neq O$ din planul E^2 punctul $M' = I(M)$ situat pe dreapta OM astfel încît $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$; pentru $k < 0$, $O \in |MM'|$, iar pentru $k > 0$, avem $O \in |OM'|$ sau $M' \in |OM|$, după cum $d(O, M)^2$ este mai mic decît k sau mai mare decît k. Pentru $d(O, M)^2 = k$, avem $M = M'$.

Pentru inversiune convenim să folosim notaţia $I(O, k)$. Punctul M' îl numim inversul punctului M în inversiunea dată; îl vom nota $M' = I(O, k)(M)$ sau, cînd nu este pericol de confuzie, $M' = I(M)$.

Dacă $k > 0$, atunci luînd ca centru polul O al inversiunii şi ca rază $r = \sqrt{k}$ putem descrie un cerc care defineşte transformarea; îl vom numi cerc de inversiune. El este locul geometric al punctelor care coincid cu inversele lor. Două puncte inverse sînt conjugate în raport cu cercul de inversiune şi sînt situate pe acelaşi diametru al cercului.

Enunţăm cîteva proprietăţi ale inversiunii.

1. Orice inversiune $I(O, k)$ invariază dreptele ce trec prin polul O de inversiune.

2. Cercul de inversiune este invariant, punct cu punct, în inversiunea I.

3. Un cerc care nu trece prin polul de inversiune este invariant la inversiunea I dacă şi numai dacă este ortogonal cercului de inversiune.

4. Tangentele în punctele corespunzătoare a două curbe inverse formează unghiuri congruente (şi de sens contrar) cu raza vectoare comună a punctelor de contact.

Scanned with OKEN Scanner

5. Printr-o inversiune $I(O, k)$ avem $I(I(M)) = M$, $\forall M \in E^2$ (proprietatea de idempotență).

6. Transformatul prin inversiune al unui cerc care nu trece prin polul de inversiune este un cerc care nu trece prin polul de inversiune.

7. Transformatul prin inversiune al unui cerc care trece prin polul O de inversiune este o dreaptă perpendiculară pe diametrul cercului dus prin O.

8. Transformata prin inversiune a unei drepte ce nu trece prin polul de inversiune este un cerc care trece prin polul de inversiune.

9. Transformarea prin inversiune păstrează unghiurile sub care se taie drepte sau (și) cercuri, nu păstrează orientarea figurilor și nu păstrează distanța dintre puncte.

10. Printr-o inversiune $I(O, k)$ dacă punctul M' este inversul lui M, atunci și, reciproc, M este inversul lui M' prin aceeași inversiune $I(O, k)$.

Teorema 1.1. *Dacă un cerc trece prin două puncte inverse, atunci el taie ortogonal cercul de inversiune și, reciproc, dacă două puncte M și M' au proprietatea că oricare cerc ce trece prin ele taie ortogonal un cerc dat, atunci ele sînt inverse în raport cu cercul dat.*

Teorema 1.2. *Dacă două perechi de puncte sînt inverse, atunci ele sînt conciclice.*

Teorema 1.3. *Dacă două puncte sînt inverse în raport cu un cerc, atunci distanțele lor la un punct oarecare de pe acest cerc sînt într-un raport constant.*

Definind inversiunea în spațiul tridimensional E^3 ca și în plan, evident pot fi formulate cu ușurință teoreme și proprietăți asemănătoare. O parte dintre ele au fost propuse ca probleme sau au fost folosite la conceperea diferitelor probleme conținute în lucrare.

Construirea figurii inverse a unei figuri date facilitează demonstrarea unor teoreme sau rezolvarea unor probleme de geometrie. La aplicarea metodei inversiunii o importanță deosebită are stabilirea polului de inversiune și a puterii inversiunii. Acestea fiind stabilite, aplicarea metodei de rezolvare se reduce la faptul că o figură dată se transformă în raport cu polul inversiunii (aplicînd teoremele referitoare la inversiune) în altă figură în care operarea cu datele problemei devine mai ușoară și mai rapidă.

Exemplu. Se consideră cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ secante în M și N. Tangentele duse în punctul M inter-

Scanned with OKEN Scanner

sectează $\mathscr{C}_1$ în B, iar pe $\mathscr{C}_2$ în A. Să se demonstreze că patrulaterul $MACB$ este inscriptibil, știind că punctul C este simetricul punctului M față de N.

Analiza problemei. Construim figura geometrică conform datelor problemei. Analizăm figura și căutăm elementele cheie, ce ne conduc spre rezolvare. Aplicarea pe figură a teoremelor referitoare la condițiile ce trebuie să le îndeplinească un patrulater inscriptibil ne duc spre soluția problemei. Observăm că punctele M, N și C sînt coliniare iar M este punctul din care pornesc și secantele MA și MB. Aceasta ne sugerează ideea că problema se poate rezolva prin metoda inversiunii.

Rezolvare. Trebuie să stabilim polul inversiunii și puterea inversiunii. Drept pol al inversiunii luăm cel mai convenabil punct, care în cazul nostru este punctul M deoarece este și unul din vîrfurile patrulaterului, iar ca putere a inversiunii alegem un număr oarecare $k > 0$.

Prin inversiunea $I(M, k)$, centrul O_1 al cercului $\mathscr{C}_1$ se transformă în dreapta EX perpendiculară pe MO_1, iar centrul O_2 al cercului $\mathscr{C}_2$ se transformă prin aceeași inversiune $I(M, k)$ în dreapta FY perpendiculară pe MO_2. Prelungim secantele MA și MB pînă intersectează dreptele FY și EX în punctele A', respectiv, B'. Punctul $A' = I(A)$ este transformatul prin inversiune al punctului A, iar B' este inversul lui B prin aceeași inversiune. Inversul punctului N se găsește la intersecția, notată cu N', a dreptelor EX și FY. Observăm că s-a format patrulaterul $MA'N'B'$ și se demonstrează că este un paralelogram (vezi fig. VI.1).

Rămîne să determinăm poziția inversului punctului C. Fie acesta C'. Atunci va rezulta că $\|MC\| \cdot \|MC'\| = k$. Punctele N și N' fiind inverse rezultă că $\|MN\| \cdot \|MN'\| = k$, de unde obținem $\|MC\| \cdot \|MC'\| = \|MN\| \cdot \|MN'\|$. Conform ipotezei presupuse punctul C este simetricul lui M față de N, deci $\|MC\| = 2\|MN\|$, pe care înlocuindu-l în relația anterioară avem

$$2\|MN\| \cdot \|MC'\| = \|MN\| \cdot \|MN'\|,$$

adică $\|MC'\| = \|MN'\|/2$. De aici rezultă că punctul C', inversul lui C în inversiunea de pol M și putere k, se află la mijlocul diagonalei $|A'B'|$, adică punctele A', C' și B', inversele vîrfurilor A, C și B ale patrulaterului $MACB$ (în inversiunea de pol M și putere k) sînt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar am reuşit să obţinem prin inversiune o nouă figură ale cărei proprietăţi conduc la soluţia problemei.

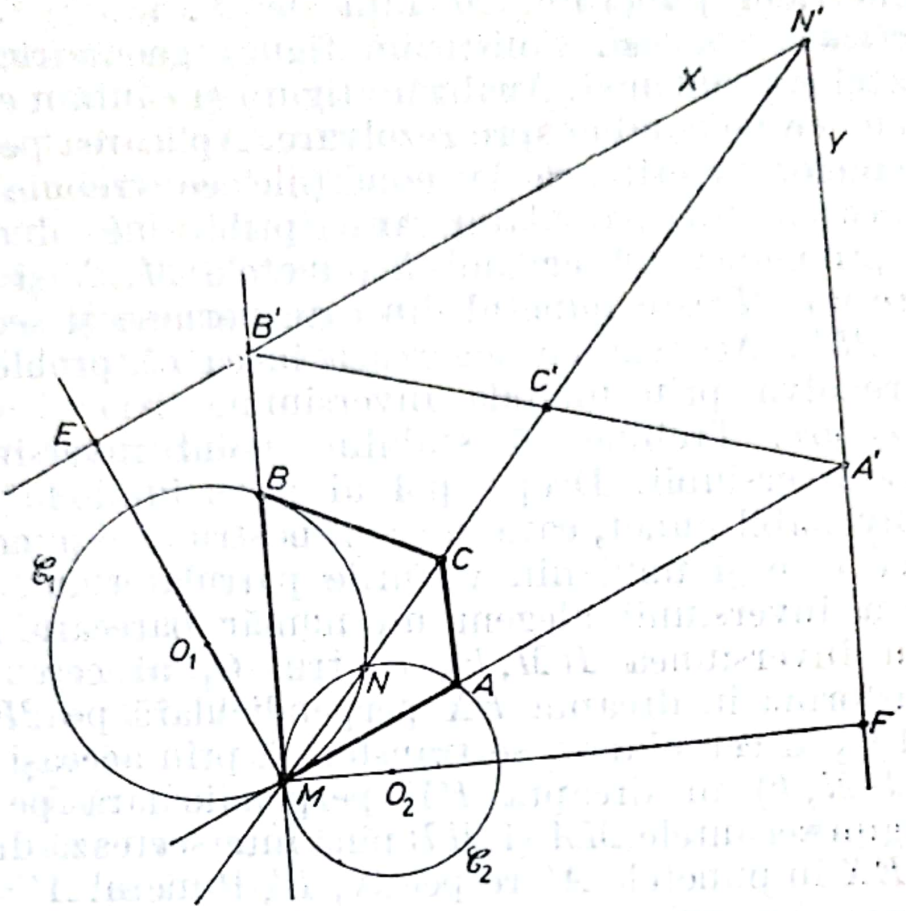


Fig. VI.1

Soluţie. Figura inversă a dreptei ce trece prin punctele A', C' şi B' este un cerc ce trece prin polul de inversiune, în cazul de faţă prin punctul M, deci şi prin A, C şi B. Rezultă că punctele M, A, C şi B se află pe un cerc şi prin urmare patrulaterul $MACB$ este inscriptibil.

2 PROBLEME REZOLVATE

1. Fie inversiunea I de pol O şi putere k. Punctele C, M şi N sînt puncte necoliniare iar $M' = I(M)$ şi $N' = I(N)$. Să se arate că:

a) $\Delta CMN \sim \Delta CN'M'$;

b) $\|M'N'\| = \|MN\| \cdot \dfrac{k}{\|CM\| \cdot \|CN\|}$.

Soluţie. a) Din $I_{(C,\,k)}(M) = M'$ şi $I_{(C,\,k)}(N) = N'$ rezultă că $M' \in |CM|$ şi $N' \in |CN|$. Deoarece e $\|CM\| \cdot \|CM'\| = k$

și $\|CN\| \cdot \|CN'\| = k$, avem $\|CM\| \cdot \|CM'\| = \|CN\| \cdot \|CN'\|$. Rezultă că $\Delta CMN \sim \Delta CN'M'$ (vezi fig. VI.2).

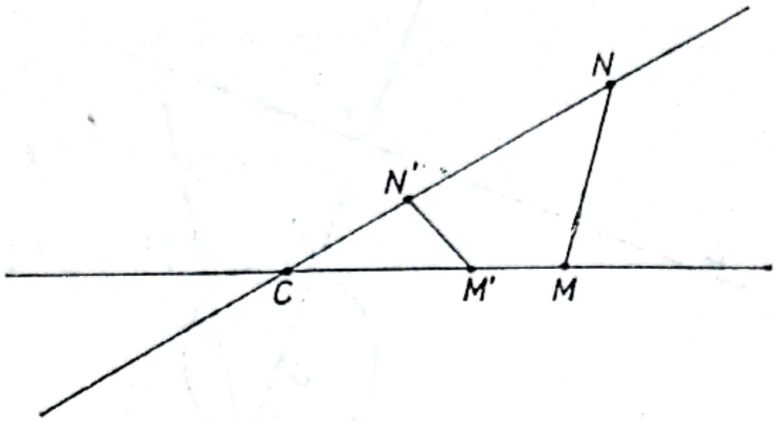


Fig. VI.2

b) Din proporționalitatea laturilor și înlocuind $\|CM\| \cdot \|CM'\|$ cu k va rezulta:

$$\frac{\|M'N'\|}{\|MN\|} = \frac{\|CM'\|}{\|CN\|} = \frac{\|CM'\| \cdot \|CM\|}{\|CN\| \cdot \|CM\|} =$$

$$= \frac{k}{\|CM\| \cdot \|CN\|}.$$

Deci $\|M'N'\| = \|MN\| \dfrac{k}{\|CM\| \cdot \|CN\|}$.

2. Să se arate că o dreaptă Δ care nu trece prin polul unei inversiuni se transformă într-un cerc, care trece prin polul inversiunii, al cărui centru se află pe perpendiculara dusă din pol pe dreapta Δ dată.

Soluție. Fie inversiunea $I_{(C,k)}: \pi \to \pi$ și un punct oarecare $M \in \Delta$ (vezi fig. VI.3). Construim prin punctul C dreapta $d \perp \Delta (C \in d)$ și notăm $\{A\} = \Delta \cap d$. Fie $A' = I_{(C,k)}(A)$ și $M' = I_{(C,k)}(M)$. Din definiția inversiunii avem: $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM'} = k$ și $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA'} = k$. Rezultă că punctele M, A, A' și M' sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil deoarece $\widehat{MAA'} \equiv \widehat{MM'A'} = 90°$. Deci M' descrie cercul de diametru $|CA'|$, care trece prin polul C al inversiunii $I(C, k)$ și este perpendicular pe dreapta Δ dată.

3. Să se arate că transformatele prin inversiune a două drepte concurente, care nu trec prin polul inversiunii,

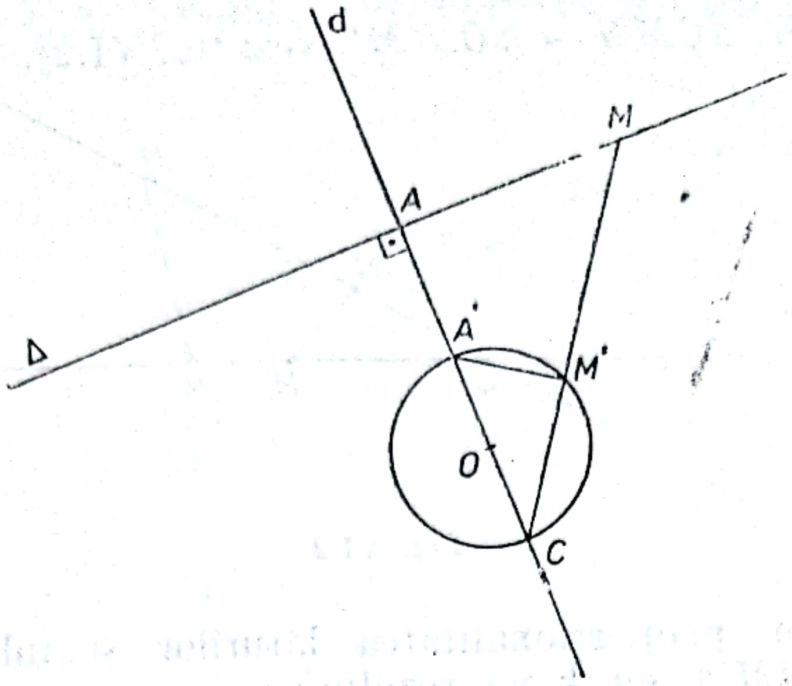


Fig. VI. 3

sînt două cercuri care se întîlnesc în polul inversiunii sub un unghi egal cu unghiul dintre dreptele date.

Soluție. Fie $\mathscr{C}_1 = I_{(C,\,k)}(d_1)$ și $\mathscr{C}_2 = I_{(C,\,k)}(d_2)$ cercurile obținute din transformarea dreptelor d_1, respectiv, d_2 prin inversiunea de pol C și raport k. Deoarece $CA \perp d_2$ și $CB \perp d_1$ rezultă că $\widehat{ACB} \equiv \widehat{d_1 d_2}$ (vezi fig. VI.4).

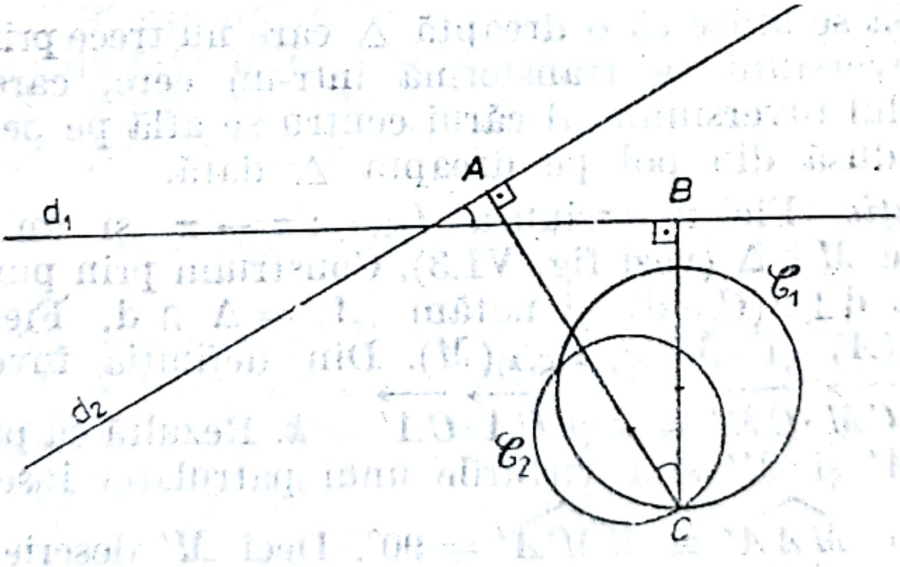


Fig. VI.4

4. Să se arate că transformatul prin inversiune al unui cerc este o dreaptă, dacă cercul dat trece prin polul inver-

siunii, sau un cerc dacă cercul dat nu trece prin polul inversiunii.

Soluție. Fie $M \in \mathscr{C}(\omega, r)$ și $M' = I_{(C,\,k)}(M)$. Conform definiției inversiunii are loc relația

$$\|CM\| \cdot \|CM'\| = k. \tag{1}$$

Notăm cu $\{N\} = CM \cap \mathscr{C}(\omega, r)$. Atunci

$$\|CN\| \cdot \|CM\| = \rho, \tag{2}$$

puterea punctului C față de cerc. Făcînd raportul relațiilor (1) și (2) rezultă

$$\frac{\|CM\| \cdot \|CM'\|}{\|CN\| \cdot \|CM\|} = \frac{k}{\rho}, \text{ de unde } \frac{\|CM'\|}{\|CN\|} = \frac{k}{\rho}.$$

Aceasta fiind o omotetie rezultă că punctul M' descrie linia omotetică a cercului $\mathscr{C}(\omega, r)$, care este cercul $\mathscr{C}_1(\omega_1, r_1)$. Raportul razelor va fi $r_1/r_2 = k/\rho$, iar centrele sînt date de relația $d(C, \omega_1)/d(C, \omega) = k/\rho$.

5. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$ de diametru $|AB|$. Pe tangenta în A la cercul dat se consideră punctele variabile P și Q cu proprietatea că produsul $\|AP\| \cdot \|AQ\|$ este constant. Să se arate că:

a) Dreapta $P'Q'$ trece printr-un punct fix (P' și Q' sînt punctele unde PB, respectiv, QB intersectează a doua oară cercul dat).

b) Dreapta $P''Q''$ trece printr-un punct fix (P'' și Q'' sînt punctele de tangență ale cercului dat cu celelalte două tangente care se mai pot duce din punctele P și Q).

Soluție. a) Considerăm inversiunea I de pol B și putere $4r^2$ (vezi fig. VI.5). Imaginea lui $\mathscr{C}(O, r)$ prin inversiunea I este tangenta în A la cercul dat și invers. Dreapta $P'Q'$ se transformă în cercul $\mathscr{C}'$ circumscris triunghiului BPQ. Fie M al doilea punct de intersecție al dreptei AB cu cercul $\mathscr{C}'$. Rezultă că $\|AP\| \cdot \|AQ\| = 2r\|AM\| = \text{const.}$ Deci M este un punct fix pe AB. Dreapta $P'Q'$ va trece prin punctul fix M', inversul lui M prin inversiunea I.

b) Fie R și S intersecțiile dreptelor PP'', respectiv, QQ'' cu tangenta în B la cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Deducem că $\|BR\| =$

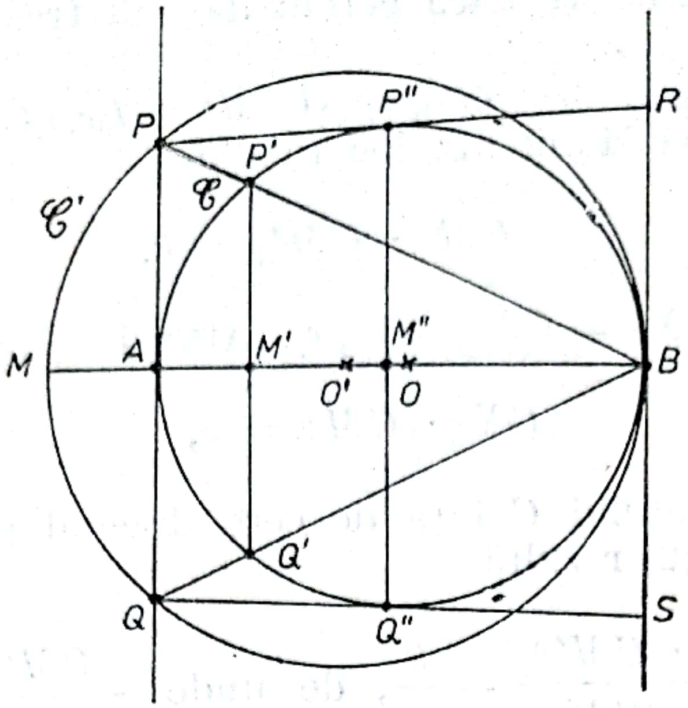


Fig. VI.5

$= 2r^2/\|AP\|$ și $\|BS\| = 2r^2/\|AQ\|$, de unde rezultă că $\|BR\| \cdot \|BS\| = \text{const.}$ Se continuă raționamentul ca la punctul a).

6. Să se arate că produsul a două inversiuni de același pol C este o omotetie de centru C.

Soluție. Fie $I_{(C, k_1)} : E^2 \setminus \{C\} \to E^2 \setminus \{C\}$ și $I_{(C, k_2)} : E^2 \setminus \{C\} \to E^2 \setminus \{C\}$ două inversiuni și un punct $M \in E^2 \setminus \{C\}$ (vezi fig. VI.6). Notăm $M' = I_{(C, k_1)}(M)$ și $M'' = I_{(C, k_2)}(M')$. Au loc relațiile

$$\|CM\| \cdot \|CM'\| = k_1 \text{ și } \|CM'\| \cdot \|CM''\| = k_2, \qquad (1)$$

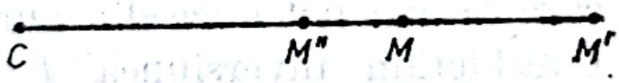


Fig. VI.6

de unde, făcînd raportul lor, obținem $\|CM''\| / \|CM\| = k_2/k_1$, adică $\|CM''\| = \frac{k_2}{k_1} \|CM\|$, care reprezintă o omotetie. Prin urmare $M'' = H_{(C, k_2/k_1)}(M)$.

7. Să se construiască un cerc care trece prin două puncte date și intersectează un cerc dat sub un unghi dat.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\mathscr{C}(O, r)$ cercul dat, iar A și B punctele date (vezi fig. VI.7). Fie M un punct oarecare aparținînd cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Construim tangenta t în M și unghiurile $\widehat{ts} \equiv \widehat{hk}$. Fie $\mathscr{C}'(O', r')$ cercul care conține punctele A și B și intersectează cercul $\mathscr{C}(O, r)$ sub unghiul $\widehat{hk}$. Transformăm

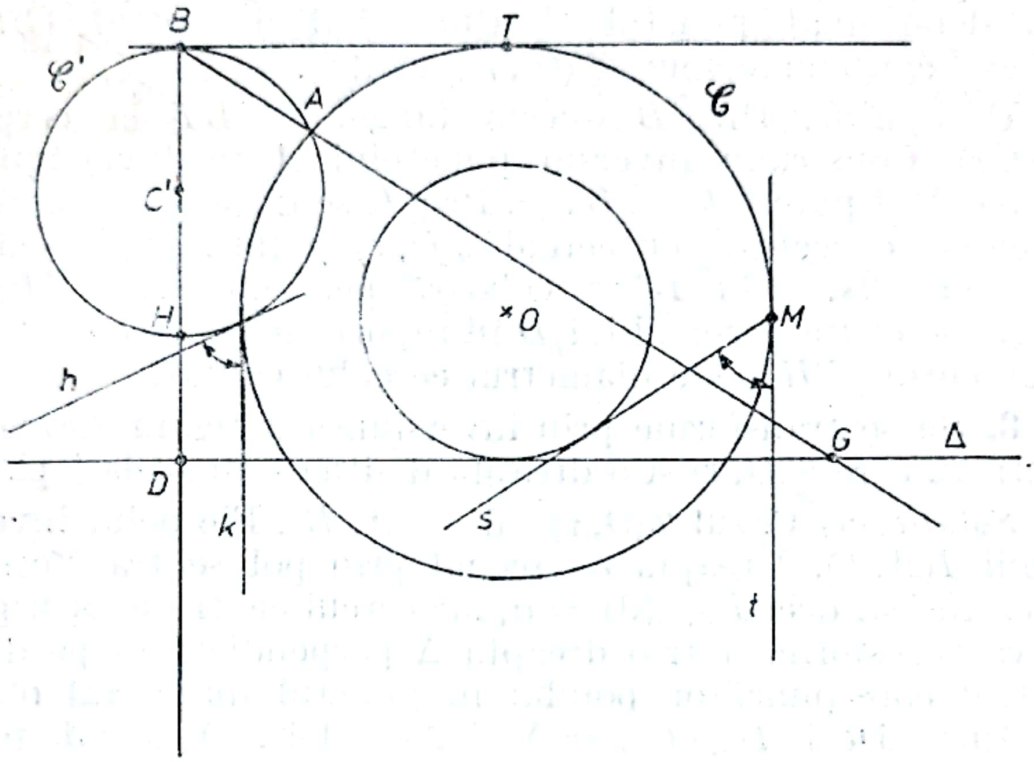


Fig. VI.7

figura astfel formată printr-o inversiune de pol B și putere $k = d(B, T)^2$, unde BT este tangenta dusă din punctul B la cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Cercul $\mathscr{C}(O, r)$ se va transforma în el însuși, iar cercul $\mathscr{C}'(O', r')$ se transformă într-o dreaptă care intersectează cercul $\mathscr{C}(O, r)$ sub un unghi $\widehat{hk}$. Pentru ca dreapta Δ să intersecteze cercul $\mathscr{C}(O, r)$ sub un unghi $\widehat{hk}$ trebuie ca ea să fie tangentă la cercul la care și dreapta BT este tangentă. Deci problema se reduce la determinarea poziției dreptei Δ.

Fie G inversul punctului A în inversiunea de pol B. Avem $d(B, A) \cdot d(B, G) = d(B, T)^2$, relație echivalentă cu $\|BA\| / \|BT\| = \|BT\| / \|BG\|$. Deci G se determină astfel încît segmentul $|BG|$ împreună cu trei segmente date să formeze o proporție. Prin G astfel determinat se duce dreapta Δ tangentă la cercul concentric cu $\mathscr{C}(O, r)$ la care este tangentă dreapta BT. Centrul O' al cercului

Scanned with OKEN Scanner

căutat se află pe perpendiculara coborîtă din B pe dreapta Δ. Fie D intersecția acestei perpendiculare cu Δ. Deoarece Δ este inversa cercului $\mathscr{C}'(O', r')$ are loc relația

$$\|BD\| \cdot \|BH\| = \|BT\|^2.$$

Deci putem determina punctul H în același mod cum am determinat punctul G. Cunoscînd diametrul $|BH|$ putem construi cercul $\mathscr{C}'(O', r')$ căutat.

Construcție. Din B ducem tangenta $|BT$ la cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Construim inversul punctului A în inversiunea de pol B și putere $k = \|BT\|^2$. Prin G se duce o tangentă Δ la cercul concentric cu cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și tangent la semidreapta Ms. Din B se coboară perpendiculara $|BD|$ pe Δ. Se caută inversul lui D în raport cu B, care este H. Segmentul $|BH|$ este diametrul cercului căutat.

3. Să se transforme prin inversiunea I figura formată dintr-un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ și o dreaptă d situate în același plan.

Soluție. a) Cazul $\mathscr{C}(O, r) \cap \mathrm{d} = \{A, B\}$. Fie polul inversiunii $I(A, k)$. Dreapta d trecînd prin pol se transformă în ea însăși, deci $I_{(A, k)}(\mathrm{d}) = \mathrm{d}$, iar cercul ce trece prin pol se va transforma într-o dreaptă Δ perpendiculară pe diametrul corespunzător polului în punctul diametral opus acestuia. Deci $I_{(A, k)}(\mathscr{C}) = \Delta$ și $\Delta \perp AA'$. Aplicînd teorema catetei în triunghiul $AA'B'$ avem

$$d(A, A')^2 = d(A, B) \cdot d(A, B) = 4r^2.$$

Deci transformata cercului $\mathscr{C}(O, r)$ este o dreaptă Δ ce trece prin transformatul punctului B în inversiunea de pol A și raport $k = 4r^2$. Prin inversiunea față de unul din punctele de contact, o dreaptă și un cerc se transformă în două drepte concurente.

b) Cazul $\mathscr{C}(O, r) \cap \mathrm{d} = \{T\}$ (d este tangentă la cerc în punctul T). Conform aceluiași raționament rezultă că dreapta Δ în care se transformă cercul va fi paralelă cu d, la distanța $2r$.

c) Cazul $\mathscr{C}(O, r) \cap \mathrm{d} = \{\emptyset\}$. Luînd polul de inversiune fie pe cerc, fie pe dreaptă, figura se transformă tot într-un cerc și o dreaptă. Vom arăta că există posibilitatea ca figura să se transforme în două cercuri concentrice.

Notăm cu O' centrul comun al cercurilor transformate. Toate dreptele d' ce trec prin O' sînt ortogonale cu aceste

Scanned with OKEN Scanner

cercuri. Dacă ω este un pol de inversiune care transformă pe $\mathscr{C}(O, r)$ și O', atunci toate cercurile ce trec prin ω se vor transforma în dreptele d'. Rezultă că cercurile Γ sînt ortogonale cu d și $\mathscr{C}(O, r)$. Se știe că ele trec prin punctele limită ale fascicolului definit prin cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și axa radicală (D). Unul din aceste puncte este O, iar celălalt ω.

9. Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat care să treacă prin două puncte A și B din planul cercului dat.

Soluție. Fie cercul dat $\mathscr{C}(O, r)$ și punctele A și B din planul cercului. Considerăm inversiunea de pol A și putere ρ (ρ este puterea punctului A față de cercul $\mathscr{C}(O, r)$). Această inversiune conservă cercul $\mathscr{C}'$ și transformă punctul B într-un punct B' (vezi fig. VI.8). Inversele cercurilor

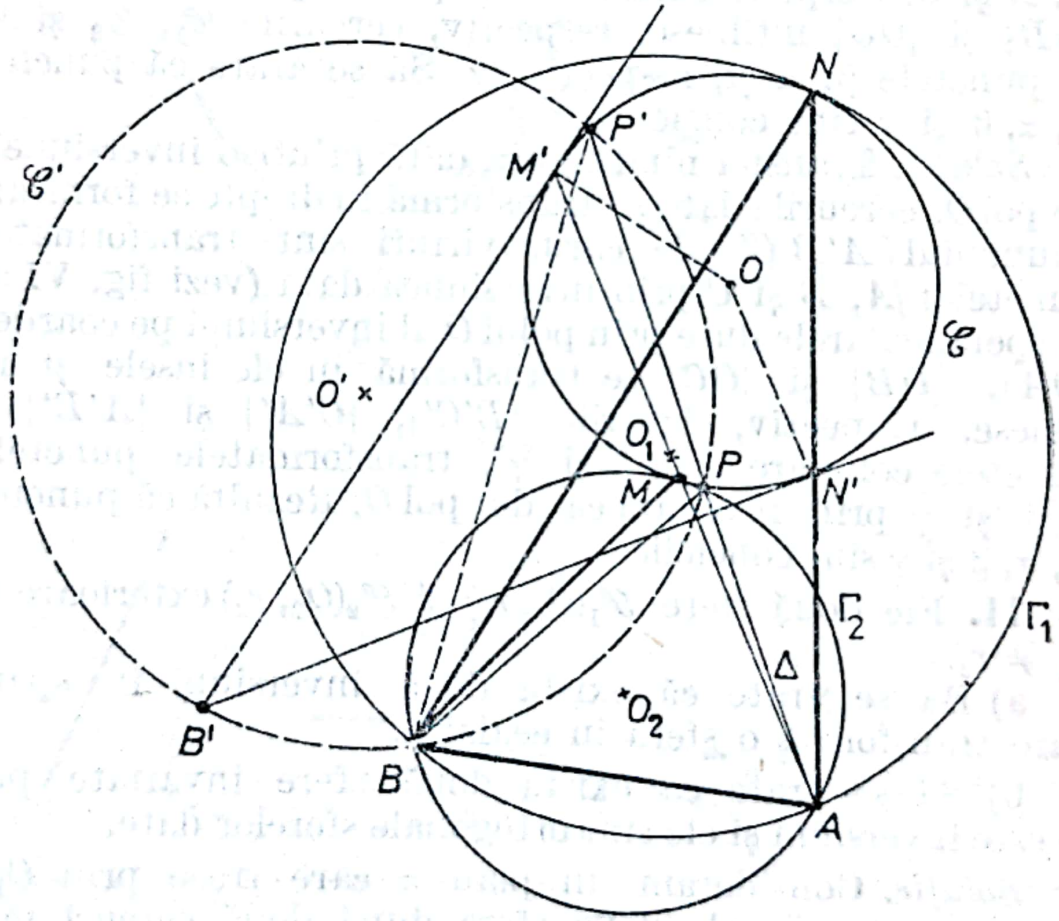


Fig. VI.8

căutate sînt tangentele din B' la cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Fie aceste tangente $|M'B'$ și $|N'B'$. Inversele M și N ale punctelor M' și N' sînt punctele de contact ale cercurilor căutate

Scanned with OKEN Scanner

$\Gamma_1(O_1, r_1)$ și $\Gamma_2(O_2, r_2)$ cu cercul $\mathscr{C}(O, r)$, adică M, respectiv, N.

Construcție. Considerăm cercul dat și punctele A și B. Din punctul A ducem o secantă oarecare Δ care intersectează cercul în P și P'. Construim cercul circumscris triunghiului BPP'; la intersecția acestuia cu dreapta AB se va afla punctul B'. Din B' ducem tangentele la cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și notăm cu M', respectiv, N' punctele de contact. Unim A cu M', respectiv, N' și obținem la intersecția lui AM', respectiv, AN' cu cercul $\mathscr{C}(O, r)$ punctele M, respectiv, N care sînt punctele de contact ale cercului $\mathscr{C}(O, r)$ cu cercurile căutate. Construim apoi cercurile Γ_1 și Γ_2 circumscrise triunghiurilor AMB și ANB.

10. Trei cercuri $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ și $\mathscr{C}_3$ au un punct comun O și se întîlnesc din nou, două cîte două, în alte trei puncte A, B și C. Perpendicularele duse prin O pe coardele $|OA|$, $|OB|$ și $|OC|$ întîlnesc, respectiv, cercurile $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ și $\mathscr{C}_3$ în punctele β, α și, respectiv, γ. Să se arate că punctele O, α, β și γ sînt conciclice.

Soluție. Transformînd figura dată printr-o inversiune I de pol O, cercurile date se transformă în drepte ce formează triunghiul $A'B'C'$ ale cărui vîrfuri sînt transformatele punctelor A, B și C prin inversiunea dată (vezi fig. VI.9). Perpendicularele duse prin polul O al inversiunii pe coardele $|OA|$, $|OB|$ și $|OC|$ se transformă în ele însele și întîlnesc, respectiv, laturile $|B'C'|$, $|C'A'|$ și $|A'B'|$ în punctele coliniare α', β' și γ', transformatele punctelor α, β și γ prin inversiunea de pol O. Rezultă că punctele O, α, β și γ sînt conciclice.

11. Fie două sfere $\mathscr{S}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{S}_2(O_2, r_2)$ exterioare cu $r_1 \neq r_2$.

a) Să se arate că există două inversiuni în spațiu care transformă o sferă în cealaltă.

b) Să se arate că există două sfere invariate prin aceste inversiuni și ele sînt ortogonale sferelor date.

Soluție. Considerăm un plan π care trece prin O_1O_2 și intersectează cele două sfere după două cercuri mari (vezi fig. VI.10). Tangentele interioare și tangentele exterioare ale celor două cercuri se intersectează în punctele O', respectiv, O situate pe linia centrelor O_1O_2, astfel încît $O_2 \in |O_1O|$ dacă $r_1 > r_2$ și $O' \in |O_1O_2|$. Există două inversiuni în planul π avînd polurile în O și O' care trans-

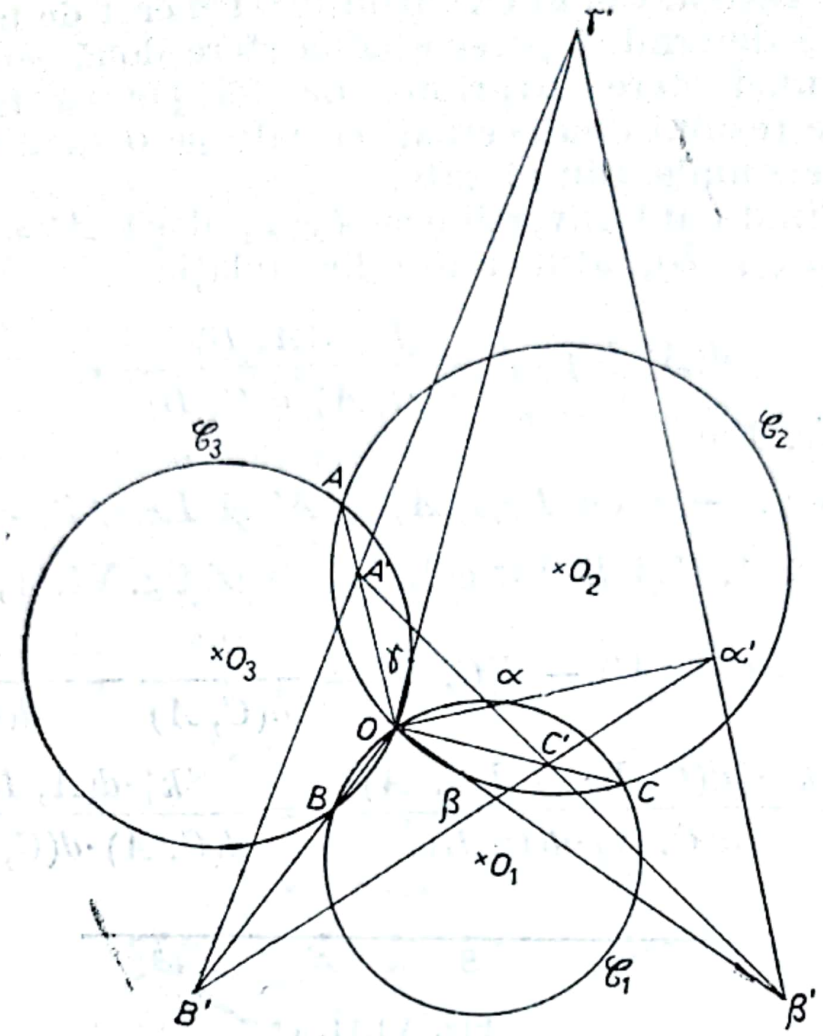


Fig. VI.9

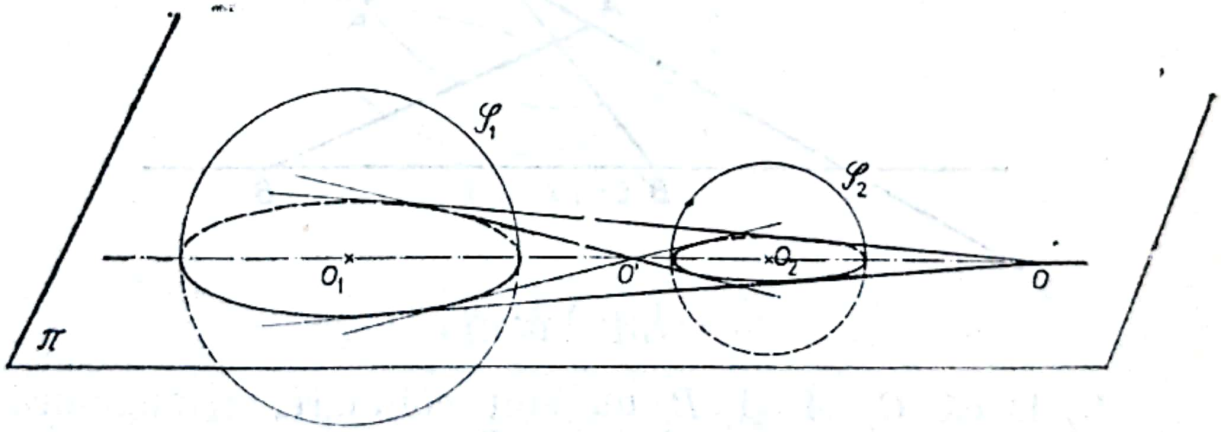


Fig. VI.10

formă un cerc în celălalt. Cînd planul π se roteşte în jurul axei O_1O_2 cele două puncte O şi O' nu se schimbă. Prin urmare există două inversiuni în spaţiu care schimbă o sferă în cealaltă, una de putere pozitivă iar cealaltă de

Scanned with OKEN Scanner

putere negativă. Conul cu vîrful în O generat de tangentele exterioare determină pe cele două sfere două cercuri care aparţin unei sfere invariate. La fel pentru tangentele interioare rezultă două cercuri situate pe o sferă invariată prin inversiunile considerate.

12. Fiind dată inversiunea $I_{(C,\,k)}$, dacă $A' = I_{(C,\,k)}(A)$ şi $B' = I_{(C,\,k)}(B)$, atunci are loc relaţia

$$d(A',B') = \frac{|k| \cdot d(A,\,B)}{d(C,\,A) \cdot d(C,\,B)},$$

Soluţie. Fie

$I_{(C,\,k)} : \pi \to \pi$ cu $I_{(C,\,k)}(A) = A'$ şi $I_{(C,\,k)}(B) = B'$.

a) Dacă A, C şi B sînt coliniare (vezi fig. VI.11, a), avem

$$d(A',\,B') = d(C,\,A') - d(C,\,B') = \frac{|k|}{d(C,\,A)} - \frac{|k|}{d(C,\,B)} =$$

$$= \frac{|k| \cdot [d(C,\,B) - d(C,\,A)]}{d(C,\,A) \cdot d(C,\,B)} = \frac{|k| \cdot d(A,\,B)}{d(C,\,A) \cdot d(C,\,B)}.$$

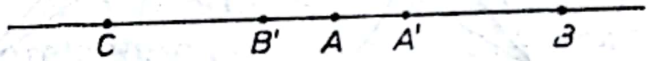


Fig. VI.11, a

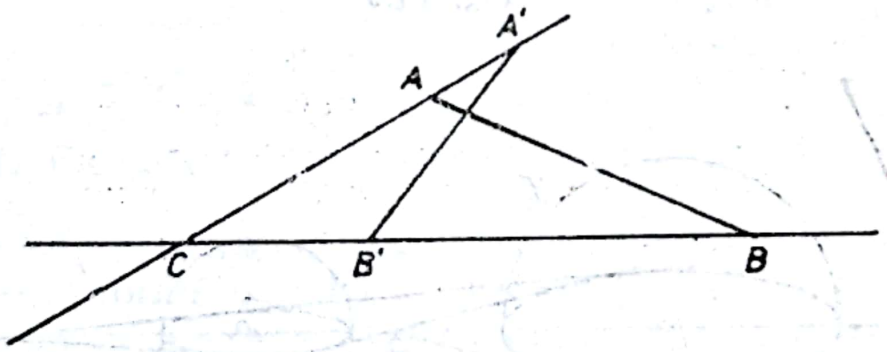


Fig. V.11, b

b) Dacă C, A şi B nu sînt coliniare, triunghiurile CAB şi $CA'B'$ au $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'CB}$ (vezi fig. VI.11, b). Rezultă $\|CA\| / \|CB\| = \|CB'\| / \|CA'\|$, adică cele două triunghiuri sînt asemenea şi atunci

$$\frac{\|CA\|}{\|CB'\|} = \frac{\|CB\|}{\|CA'\|} = \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|},$$

deci

$$d(A', B') = \frac{d(C, A') \cdot d(A, B)}{d(C, B)} =$$

$$= \frac{d(C, A') \cdot d(C, A)}{d(C, B) \cdot d(C, A)} d(A, B) = \frac{|k| \cdot d(A, B)}{d(C, A) \cdot d(C, B)},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

13. Dacă punctele O, A, B și C sînt concilice, cercurile de diametre $|OA|$, $|OB|$ și $|OC|$ se întîlnesc două cîte două în trei puncte coliniare.

Soluție. Inversiunea de pol O transformă cercurile de diametre $|OA|$, $|OB|$ și $|OC|$ în dreptele α, β și γ, a căror intersecție două cîte două formează triunghiul ABC. Cercul $\mathscr{C}$ circumscris acestui triunghi trece prin O (vezi fig. VI.12). Rezultă că cercul $\mathscr{C}$ se transformă în dreapta

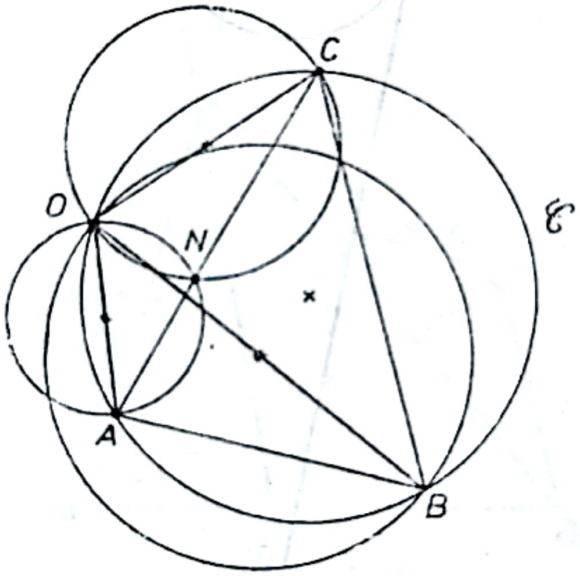


Fig. VI.12

ANC, unde A, N și C sînt punctele de intersecție ale cercurilor date și în același timp sînt inversele vîrfurilor triunghiului ABC prin inversiunea considerată.

14. Pe sfera $\mathscr{S}(O, r)$ se consideră $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{\emptyset\}$. Să se arate că există două conuri care conțin fiecare cele două cercuri.

Soluție. Considerăm sferele $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ care trec prin cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, respectiv, $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ și sînt ortogonale sferei $\mathscr{S}(O, r)$ (vezi fig. VI.13). Conform problemei 11 există două inversiuni care transformă $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ una în

Scanned with OKEN Scanner

cealaltă, cu polul de inversiune O' (intersecția tangentelor exterioare), respectiv, O'' (intersecția tangentelor interioare). Sfera $\mathscr{S}(O, r)$ va fi invariată prin inversiunea cu

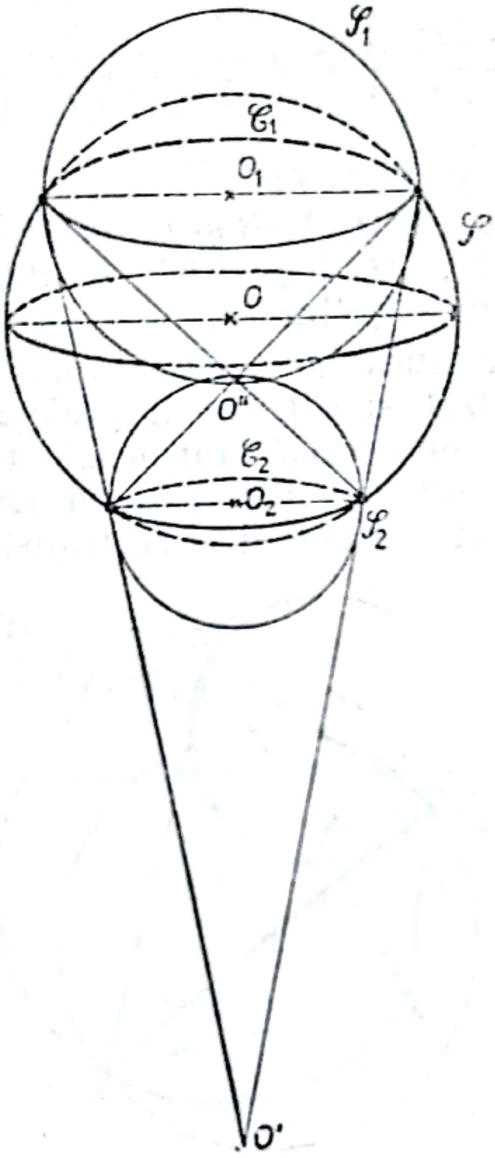


Fig. VI.13

polul în O'', deoarece este ortogonală sferelor $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$. Astfel cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ sînt situate pe conul cu centrul în O'' și avînd ca generatoare tangentele interioare ale căror puncte de tangență cu $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ sînt cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$. Analog, există un con cu vîrful în O', care conține cele două cercuri date, avînd ca generatoare tangentele exterioare cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$.

15. Fie un cerc $\mathscr{C}$ și cercurile $\mathscr{C}'$ și $\mathscr{C}''$ secante în A și B și tangente cercului $\mathscr{C}$. Un cerc variabil ω, tangent la $\mathscr{C}'$

Scanned with OKEN Scanner

și $\mathscr{C}''$, intersectează pe $\mathscr{C}$ în M, respectiv, N. Să se găsească locul geometric al centrului cercului triunghiului AMN.

Soluție. Aplicînd transformarea prin inversiune de pol A, cercurile $\mathscr{C}_1$ și ω_1 se întîlnesc în M_1, respectiv, N_1 și dreapta M_1N_1 este transformata cercului circumscris triunghiului AMN. Locul geometric căutat este o dreaptă Δ perpendiculară pe M_1N_1 și paralelă cu bisectoarea unghiului format de dreptele OO' și OO''.

16. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Se iau inversele a trei vîrfuri ale tetraedrului, iar al patrulea vîrf se consideră polul inversiunii. Să se arate că se obține un triunghi ale cărui unghiuri sînt întotdeauna aceleași, oricare ar fi vîrful tetraedrului ales ca pol de inversiune.

Soluție. Fie A', B' și C' inversele vîrfurilor A, B și C în inversiunea de pol D și raport k (vezi fig. VI.14). Avem

$$\|B'C'\| = \frac{k \cdot \|BC\|}{\|DB\| \cdot \|DC\|}$$

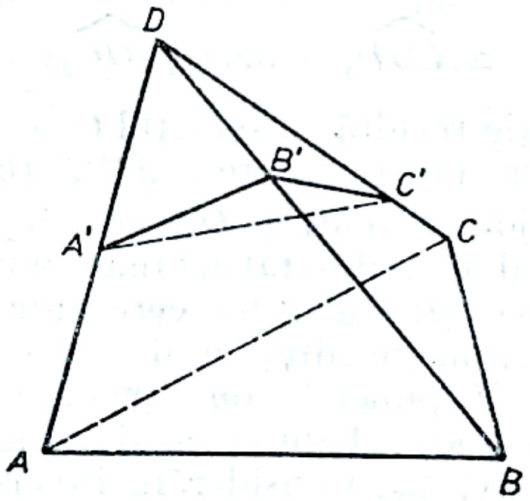


Fig. VI.14

și expresii analoage pentru $|C'A'|$ și $|A'B'|$. Din cele trei expresii găsim

$$\|B'C'\| / \|C'A'\| / \|A'B'\| =$$

$$= \|BC\| \cdot \|DA\| / \|CA\| \cdot \|DB\| / \|AB\| \cdot \|DC\|.$$

Deoarece în membrul drept al acestor relații toate cele patru vîrfuri intră cu același rol, vom avea aceleași relații între laturi în triunghiul analog cu $A'B'C'$, pe care-l obținem dacă vom lua ca pol de inversiune oricare alt

vîrf al tetraedrului. Rezultă că și unghiurile triunghiurilor vor fi aceleași.

17. Să se transforme prin inversiune patru puncte coliniare A, B, C și D, respectiv, în patru puncte A', B', C' și D', care să fie vîrfurile consecutive ale unui dreptunghi.

Soluție. Fie A, B, C și D patru puncte aparținînd dreptei d și fie punctul O, aparținînd dreptei d, polul inversiunii I de putere k. Considerăm cercul $\mathscr{C}$ care trece prin O și intersectează dreapta d. Notăm, respectiv, cu A', B', C' și D' intersecția semidreptelor $|OA$, $|OB$, $|OC$ și $|OD$ cu cercul $\mathscr{C}$. Prin $I(O, k)$ dreapta d se transformă în $\mathscr{C}$, deci A', B', C' și D' sînt, respectiv, corespondentele punctelor A, B, C și D în inversiunea $I(O, k)$. Patrulaterul $A'B'C'D'$ este înscris în cercul $\mathscr{C}$ și va fi dreptunghi dacă diagonalele $|A'C'|$ și $|B'D'|$ sînt diametre, adică

$$\widehat{AOC'} \equiv \widehat{B'OD'}, \quad \text{măs } (\widehat{A'OC'}) = 90°,$$

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}, \quad \text{măs } (\widehat{AOC}) = 90°.$$

Din ultima relație rezultă că punctul O se va afla la intersecția cercurilor de diametre $|AC|$, respectiv, $|BD|$.

18. Se dau două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ tangente exterioare. Fie d una din tangentele comune celor două cercuri. Să se construiască un cerc tangent celor două cercuri date și tangent dreptei d.

Soluție. Fie M punctele de tangență ale celor două cercuri și A_1, respectiv, A_2 punctele de tangență ale dreptei d cu $\mathscr{C}_1$, respectiv, $\mathscr{C}_2$. Considerăm inversiunea $I(A_1, k_1)$, $k_1 = \|A_1A_2\|^2$ prin care cercul $\mathscr{C}_2$ se va transforma în el însuși, iar $\mathscr{C}_1$ într-o dreaptă d' paralelă cu dreapta d și tangentă la $\mathscr{C}_2$. Problema se reduce la construirea unui cerc tangent dreptelor paralele d și d' și cercului $\mathscr{C}_2$. Problema are încă o soluție dacă considerăm și inversiunea $I(A_2, k_1)$.

19. Dacă două puncte sînt inverse în raport cu un cerc, distanțele lor la un punct oarecare de pe acest cerc sînt într-un raport constant.

Soluție. Considerăm cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și punctele A și B inverse în inversiunea I. Din $\|OA\| \cdot \|OB\| = \|OM\|^2$ rezultă că $\Delta OAM \sim \Delta OMB$ (vezi fig. VI.15), de unde

deducem $\|AM\| / \|BM\| = \|OA\| / \|OM\|$, deci raportul $\|AM\| / \|MB\|$ nu depinde de alegerea punctului M.

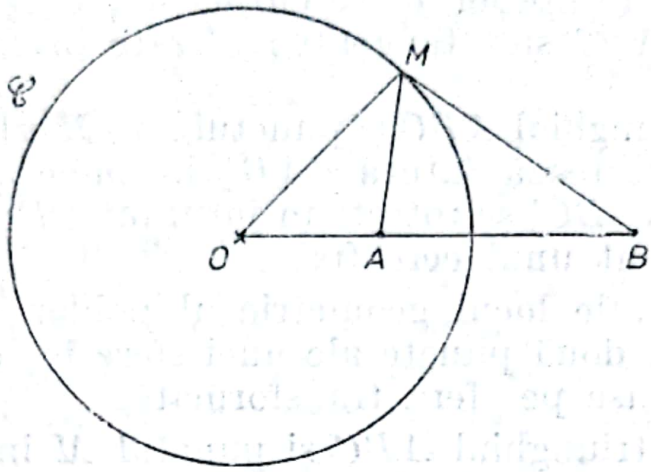


Fig. VI.15

20. Să se afle locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat și pe care două plane π și π' date determină două segmente al căror produs rămîne constant.

Soluție. Fie C punctul dat iar k produsul constant al celor două segmente. Dacă $A' = I_{(C,k)}(A)$, $A \in \pi$, atunci punctul A' se află pe sfera $\mathscr{S}$ care este inversa planului π. Deoarece prin ipoteză punctul A' se află într-un al doilea plan dat π', el trebuie să fie situat pe intersecția acestui plan cu sfera $\mathscr{S}$. De aici rezultă că locul geometric căutat va fi un con cu bază circulară dacă planul π' intersectează sfera $\mathscr{S}$. Dacă π' este tangent la $\mathscr{S}$ există o singură dreaptă care satisface condiția pusă, iar dacă π' nu are puncte comune cu $\mathscr{S}$ nu există astfel de drepte.

3. PROBLEME PROPUSE

1. Se dau două puncte A și B și cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Se cere:

a) Să se construiască un cerc tangent cercului dat, care să treacă prin punctele date A și B.

b) Să se construiască un cerc ortogonal cercului dat, care să treacă prin punctele A și B.

2. Fie $\mathscr{C}$ cercul tangent exterior cercurilor exînscrise $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ și $\mathscr{C}_c$ triunghiului ABC și fie ω_a, ω_b și ω_c cercurile

Scanned with OKEN Scanner

tangente exterior la două din cercurile $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ și $\mathscr{C}_c$ și interior la al treilea. Să se demonstreze că dacă $\mathscr{C}$ este cercul tangent interior la cercurile ω_a, ω_b și ω_c, atunci cercurile $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}'$ sînt tangente; $\mathscr{C}'$ este inversul cercului înscris.

3. Fie triunghiul ABC și punctul fix $M \in |BC|$. Cercul AMC intersectează latura $|AB|$ în punctul D. Să se arate că dacă $|BC|$ se rotește în jurul lui M cercul BMD rămîne tangent unui cerc fix.

4. Să se afle locul geometric al polilor inversiunilor care schimbă două puncte ale unei sfere în două puncte diametral opuse pe sfera transformată.

5. Se dă triunghiul ABC și punctul M în planul său. Se unește M cu vîrfurile triunghiului. Să se arate că perpendicularele coborîte din punctul H de intersecție al înălțimilor pe dreptele MA, MB și MC întîlnesc laturile $|BC|$, $|CA|$, respectiv, $|AB|$ în punctele A_1, B_1, respectiv, C_1 situate pe dreapta d, perpendiculară pe $|HM|$.

6. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar punctele notate cu A', B' și C', inversele punctelor A, B și C în inversiunea de pol H și putere k. Să se demonstreze că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$.

7. Se dă cercul $\mathscr{C}$ de diametru $|AB|$. O tangentă variabilă dusă la un cerc $\mathscr{C}'$ de centru A și rază $|AC|$, $C \in |AB|$, intersectează cercul $\mathscr{C}$ în punctele M și N. Pe $|AN|$ se ia un punct P astfel încît $|AM| \equiv |AP|$. Se cere locul geometric al punctului P.

8. Să se construiască cercurile circumscrise celor patru fețe ale unui tetraedru $SABC$. Să se arate că unghiul format de două din ele este congruent cu unghiul format de celelalte două.

9. Fie A, B și C trei puncte necoliniare. Prin A și B, respectiv, A și C se duc două cercuri $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}_1$ ortogonale, care se mai intersectează în punctul P. Să se afle locul geometric al punctului variabil P.

10. Să se arate că inversele cercurilor care au aceeași axă radicală sînt cercuri care au de asemenea aceeași axă radicală.

11. Să se arate că în patru inversiuni avînd ca poluri vîrfurile unui tetraedru, inversele celorlalte trei vîrfuri formează, respectiv, patru triunghiuri asemenea între ele.

Scanned with OKEN Scanner

12. Să se arate că toate sferele $\mathscr{S}$ ortogonale cu două sfere date $\mathscr{S}'$ și $\mathscr{S}''$ trec prin două puncte fixe.

13. Fie cercul $\mathscr{C}'$ și un punct fix O în planul său. Din punctul O ducem o secantă variabilă ce taie cercul $\mathscr{C}'$ în punctele M și M'. Cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ de diametru $|OM|$, respectiv, $|OM'|$ intersectează cercul $\mathscr{C}'$ în punctele N, respectiv, N'. Să se afle locul geometric descris de intersecția dreptelor MM' și NN' cînd secanta se rotește în jurul punctului O.

14. Fie două puncte $A \neq B$ prin care ducem două cercuri $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ tangente la un același cerc $\mathscr{C}$ și un alt cerc $\mathscr{C}_3$, ortogonal cercului $\mathscr{C}$, care trece de asemenea prin punctele A și B. Să se arate că cercul $\mathscr{C}_3$ împarte unghiul format de $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ în două unghiuri congruente și că centrul său se află la intersecția tangentelor lor comune și este centrul de asemănare pentru cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$.

15. Fie A un punct ce aparține cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ prin care se duc două secante ce intersectează cercul $\mathscr{C}_1$ în punctele M, respectiv, N, iar cercul $\mathscr{C}_2$ în punctele M', respectiv, N'. Cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ se mai intersectează într-un punct $P \neq A$ al cărui loc geometric se cere atunci cînd secantele AMM' și ANN' se rotesc în jurul punctului A.

Soluții. Indicații

1. a) Considerăm inversiunea de pol A și raport egal cu puterea punctului A față de cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Cercul căutat se transformă într-o dreaptă care trece prin transformatul punctului B și este perpendiculară pe $|OA|$.

b) Cercul căutat se transformă în dreapta care trece prin O și transformatul lui B.

2. Inversiunea al cărui pol este centrul radical Q al cercurilor exînscrise și a cărei putere este puterea lui Q în raport cu aceste cercuri le transformă pe acestea în ele însele. Ea înlocuiește cercul lui Euler O_9 cu cercul $\mathscr{C}$, transformă laturile triunghiului în cercurile ω_a, ω_b și ω_c și cercul înscris I în cercul $\mathscr{C}'$. Cercurile O_9 și I fiind tangente rezultă că și cercurile $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}'$, sînt tangente.

3. $\widehat{BMD} \equiv \widehat{BAC} = \text{const}$. Printr-o inversiune de pol M și raport k, $|AB|$ se transformă într-un cerc fix care

Scanned with OKEN Scanner

va întîlni pe $|MB|$ și $|MD|$ în punctele B' și D'. Dreapta $B'D'$ fiind tangentă la un cerc fix, rezultă că cercul BMD rămîne tangent unui cerc fix.

4. Fie M și N puncte ce aparțin sferei date. Prin ele trece un singur cerc $\mathscr{C}$, care intersectează sfera sub un unghi drept. Dacă punctele M și N sînt diametral opuse, cercul se transformă într-o dreaptă. Deci fiecare din inversiunile căutate va transforma cercul $\mathscr{C}$ într-o dreaptă astfel că locul geometric al polilor inversiunilor va fi cercul $\mathscr{C}$.

5. $\Delta AHA'' \sim \Delta A_1HA'$, deci $\|HA''\| \cdot \|HA_1\| =$

$$= \|HA\| \cdot \|HA'\| \text{ etc.}$$

$\Delta HAB' \sim \Delta HBA'$, deci $\|HA\| \cdot \|HA'\| =$

$$= \|HB\| \cdot \|HB'\| \text{ etc.}$$

Rezultă $\|HA''\| \cdot \|HA_1\| = \|HB''\| \cdot \|HB_1\| = \|HC''\| \cdot \|HC_1\|$ (vezi fig. VI.16). Punctele A'', B'' și C'' fiind proiecțiile lui H pe $|AM|$, $|BM|$ și $|CM|$ ele se află pe un cerc de diametru $|HM|$. Inversele lor, notate A_1, B_1, și C_1, în inversiunea de pol H și raport $|HA''| \cdot |HA_1|$, aparțin unei drepte d, perpendiculară pe $|HM|$.

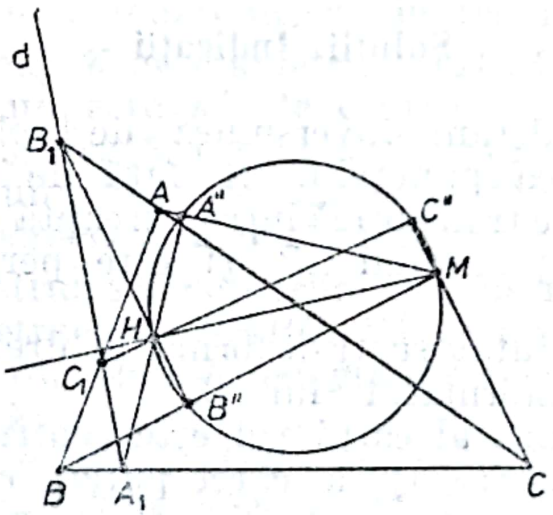


Fig. VI.16

6. Considerăm $k > 0$, prin ipoteză avem

$$\|HA\| \cdot \|HA'\| = \|HB\| \cdot \|HB'\| =$$

$$= \|HC\| \cdot \|HC'\| = k,$$

deci $\Delta AHB \sim \Delta A'HB'$ (vezi fig. VI.17). Cum $\widehat{ABH} \equiv$ $\equiv \widehat{HA'B'}$ rezultă că măs $(\widehat{HA'B'}) = 90° -$ măs $(\hat{A})$. De asemenea, $\Delta AHC \sim \Delta A'HC'$, deci $\widehat{C'A'H} \equiv \widehat{HCA}$ și au ca

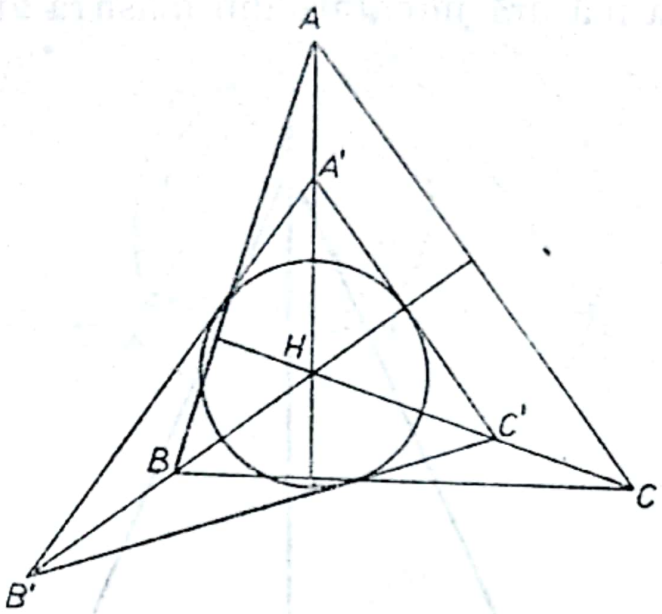


Fig. VI.17

măsură $90° -$ măs $(\hat{A})$. Deci $\widehat{HA'B'} \equiv \widehat{C'A'H}$, măsura lor fiind $90° -$ măs $(\hat{A})$. Rezultă că $|AA'|$ și $|BB'|$ sînt bisectoare în triunghiul $A'B'C'$. Analog $|CC'|$ și $|BB'|$ sînt bisectoare în triunghiul $A'B'C'$, deci punctul lor de intersecție H este centrul cercului înscris triunghiului $A'B'C'$.

7. Din relația $\|AN\| \cdot \|AM\| = \|AC\| \cdot \|AB\| = \text{const}$ rezultă că $\|AN\| \cdot \|AP\| = \text{const}$. Deci punctul P descrie o dreaptă care este inversa cercului $\mathscr{C}$ în inversiunea de pol A și putere $k = \|AC\| \cdot \|AB\|$.

8. Transformăm sfera circumscrisă tetraedrului printr-o inversiune $I(S, k)$. Ea se va transforma într-un plan π, ce nu trece prin pol (vezi fig. VI.18). Cercurile SBC, SCA și SAB se transformă, respectiv în dreptele $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$, iar cercul ABC în cercul $A'B'C'$, unde A', B' și C' sînt, respectiv, intersecțiile muchiilor

Scanned with OKEN Scanner

$|SA|$, $|SB|$ și $|SC|$ cu planul π. Unghiul format de cercurile SBC și SCA este congruent cu unghiul $B'C'A'$. Unghiul format de cercurile SAB și SBC este congruent cu unghiul format de cercul $A'B'C'$ și dreapta $A'B'$, adică unghiul format de $A'B'$ și tangenta în A', sau în B', la cerc, care este congruent cu $B'C'A'$ deoarece ambele au ca măsură jumătate din măsura arcului $\widehat{B'C'}$.

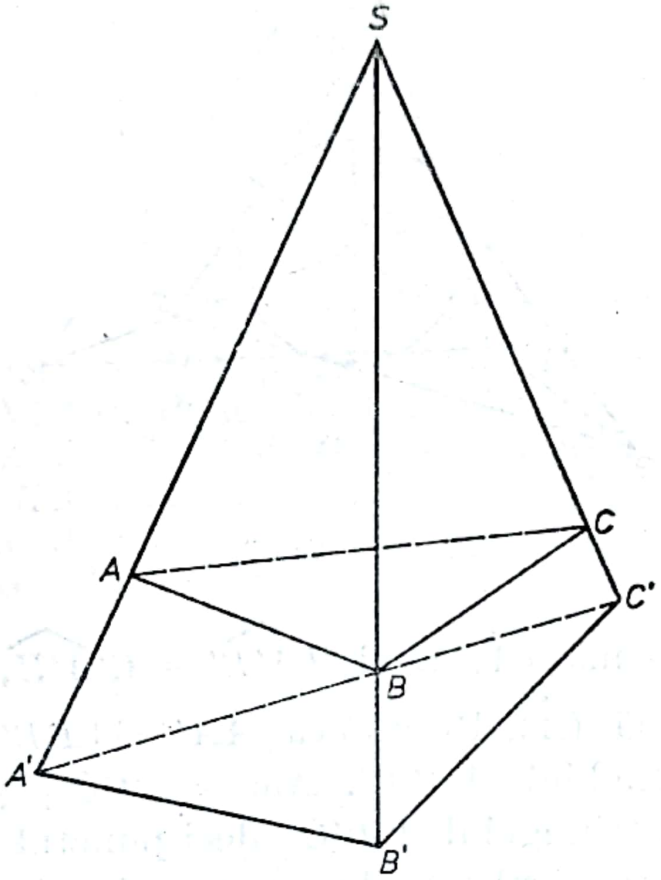
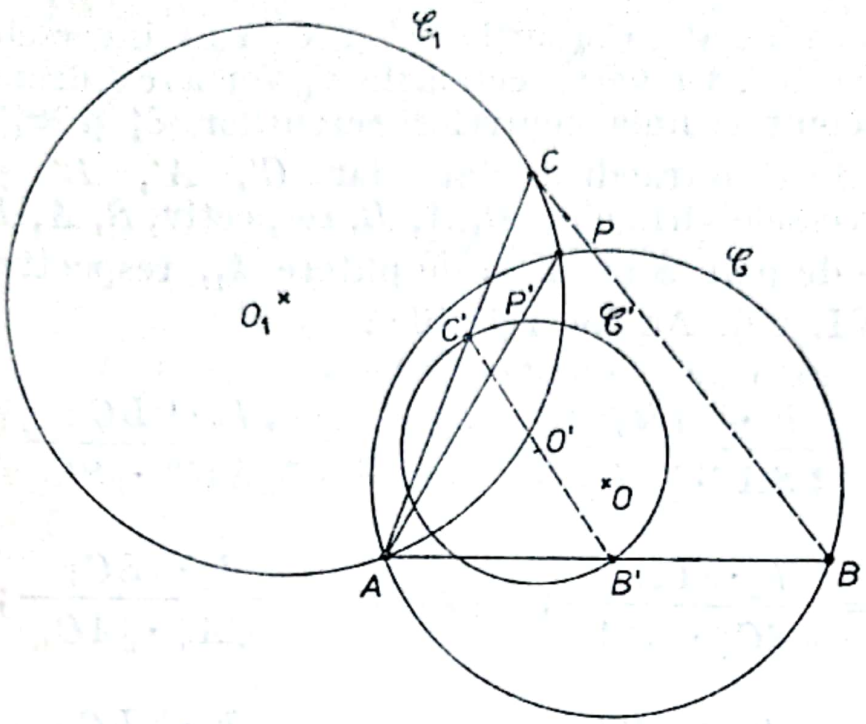


Fig. VI.18

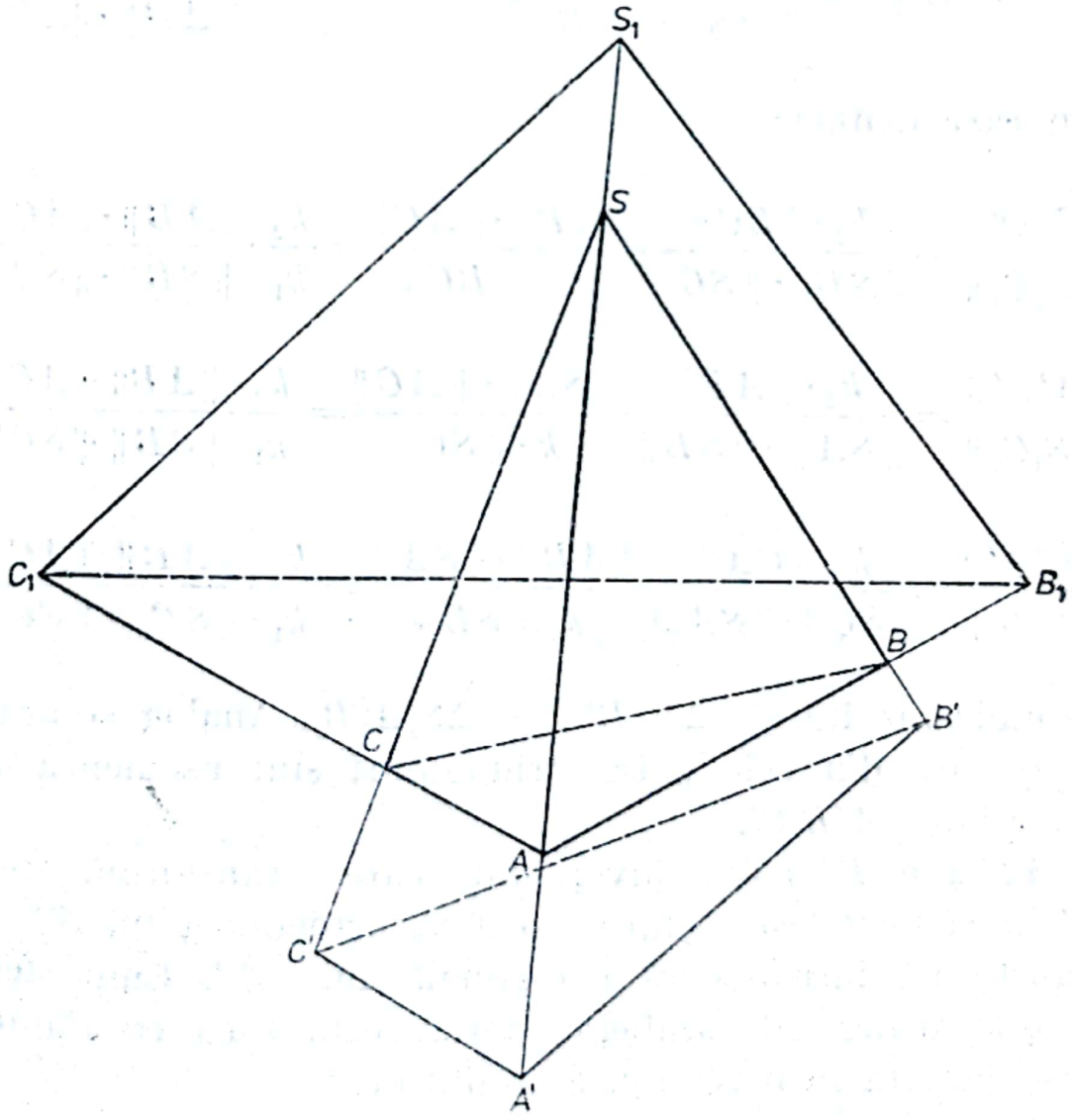
9. Se transformă figura prin inversiune luînd pe A ca pol (vezi fig. VI.19). Locul lui P', inversul lui P, este un cerc $\mathscr{C}'$ descris pe $|B'C'|$ ca diametru, unde B este inversul lui B iar C' al lui C în inversiunea considerată, și deci locul lui P este cercul $\mathscr{C}$, inversul lui $\mathscr{C}'$.

10. Cercurile care au aceeași axă radicală sînt cercuri ortogonale la două cercuri date $\mathscr{C}'$ și $\mathscr{C}''$, avînd centrele

← Fig. VI.19



↓ Fig. VI.20



Scanned with OKEN Scanner

pe această axă radicală. Cercurile $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$ sînt inversele cercurilor $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$. De aceea cercurile $\mathcal{C}_1$ vor avea drept axă radicală comună linia centrelor cercurilor $\mathcal{C}_1'$ și $\mathcal{C}_1''$.

11. Fie $SABC$ tetraedrul dat iar C', A', B' și S_1, A_1 și B_1 inversele vîrfurilor C, A, B, respectiv, S, A, B în inversiunile de poli S și A și de putere k_1, respectiv, k_2 (vezi fig. VI. 20). Au loc relațiile:

$$\|A'B'\| = \frac{k_2 \cdot \|AB\|}{\|SA\| \cdot \|SB\|}; \quad \|B'C'\| = \frac{k_2 \cdot \|BC\|}{\|SB\| \cdot \|SC\|};$$

$$\|C'A'\| = \frac{k_2 \cdot \|CA\|}{\|SC\| \cdot \|SA\|}; \quad \|S_1C_1\| = \frac{k_1 \cdot \|SC\|}{\|SA\| \cdot \|AC\|};$$

$$\|S_1B_1\| = \frac{k_1 \cdot \|SB\|}{\|AS\| \cdot \|AB\|}; \quad \|B_1C_1\| = \frac{k_1 \cdot \|BC\|}{\|AB\| \cdot \|AC\|},$$

din care deducem

$$\frac{\|B'C'\|}{\|B_1C_1\|} = \frac{k_2 \cdot \|BC\|}{\|SB\| \cdot \|SC\|} \cdot \frac{\|AB\| \cdot \|AC\|}{k_1 \cdot \|BC\|} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\|AB\| \cdot \|AC\|}{\|SB\| \cdot \|SC\|};$$

$$\frac{\|A'B'\|}{\|S_1C_1\|} = \frac{k_2 \cdot \|AB\|}{\|SA\| \cdot \|SB\|} \cdot \frac{\|SA\| \cdot \|AC\|}{k \cdot \|SC\|} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\|AB\| \cdot \|AC\|}{\|SB\| \cdot \|SC\|};$$

$$\frac{\|C'A'\|}{\|S_1B_1\|} = \frac{k_2 \cdot \|CA\|}{\|SC\| \cdot \|SA\|} \cdot \frac{\|AB\| \cdot \|SA\|}{k_1 \cdot \|SB\|} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\|AB\| \cdot \|AC\|}{\|SB\| \cdot \|SC\|},$$

de unde rezultă că $\Delta A'B'C' \sim \Delta S_1A_1B_1$. Analog se arată că oricare din cele patru triunghiuri sînt asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.

12. Fie P polul inversiunii care transformă sfera $\mathcal{S}'$ în sfera $\mathcal{S}''$ și reciproc, o sferă ortogonală lui $\mathcal{S}'$ se transformă într-o sferă ortogonală lui $\mathcal{S}''$. Cum sfera $\mathcal{S}$ este ortogonală ambelor sfere, rezultă că ea rămîne neschimbată în inversiunea amintită.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu E, F și, respectiv, H intersecțiile liniei sferelor $\mathscr{S}'\mathscr{S}''$ cu sfera $\mathscr{S}$ și cu planul radical al sferelor $\mathscr{S}'$ și $\mathscr{S}''$ vom avea

$$\|PE\| \cdot \|PF\| = k, \tag{1}$$

unde k este puterea inversiunii ce transformă sferele una în alta. Centru sferei $\mathscr{S}$ fiind în planul radical al sferelor $\mathscr{S}'$ și $\mathscr{S}''$ rezultă că F și E sînt simetrice față de H și deci

$$\|PE\| + \|PF\| = 2\|PH\|. \tag{2}$$

Relațiile (1) și (2) arată că E și F sînt fixe

13. Fie $\{P\} = MM' \cap NN'$. Considerăm inversiunea $I(P, k)$, unde $k = \|PM\| \cdot \|PM'\| = \|PN\| \cdot \|PN'\|$. Avem $M' = I(M)$ și $N' = I(N)$ și observăm că cercului $\mathscr{C}_1$ de diametru $|OM|$ îi corespunde cercul $\mathscr{C}_2$ de diametru $|OM'|$ și avem

$$\|PM\| \cdot \|PM'\| = \|PN\| \cdot \|PN'\| = \|PO\|^2.$$

Această relație arată că punctul P se află pe axa radicală a punctului O și a cercului dat $\mathscr{C}'$.

Cînd punctul O se află în exteriorul cercului $\mathscr{C}'$ locul geometric este segmentul $|P'P''|$, ce aparține axei radicale și este limitat de tangentele $|OT|$ și $|OT'|$ duse la cercul $\mathscr{C}'$. Cînd punctul O se află în interiorul cercului $\mathscr{C}'$ locul geometric este întreaga axă radicală (vezi fig. VI.21)

14. Inversiunea în raport cu cercul $\mathscr{C}_3$, care trece prin punctele A și B și este ortogonal cercului $\mathscr{C}$, îl transformă pe acesta în cercul $\mathscr{C}_1$ iar pe $\mathscr{C}_1$ într-un cerc

Scanned with OKEN Scanner

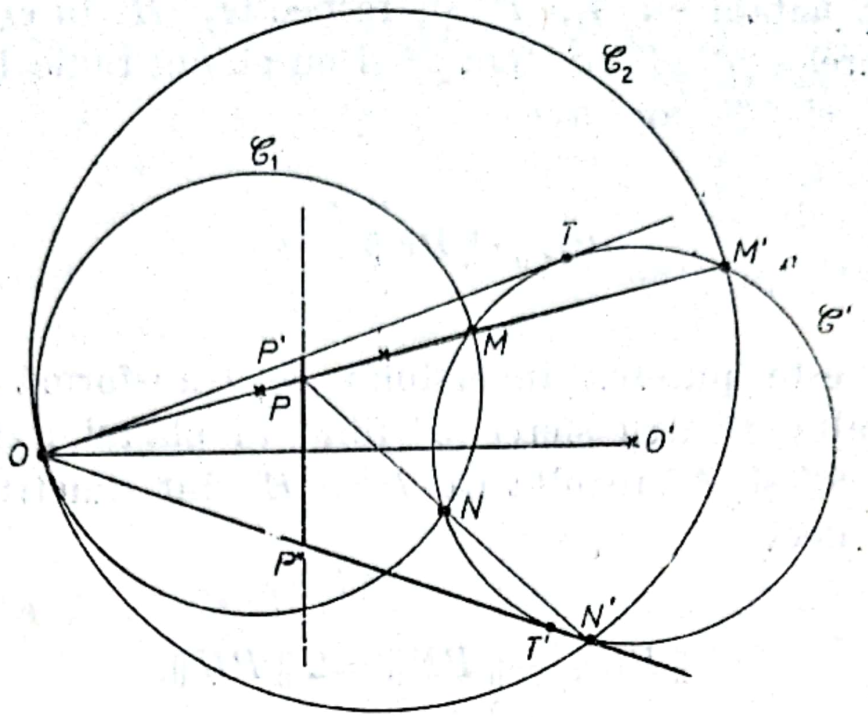


Fig. VI.21

care trece prin punctele A și B și este tangent la cerul $\mathscr{C}$, adică în cercul $\mathscr{C}_2$. Rezultă că cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ intersectează pe $\mathscr{C}_3$ sub unghiuri congruente, (vezi fig. VI.22).

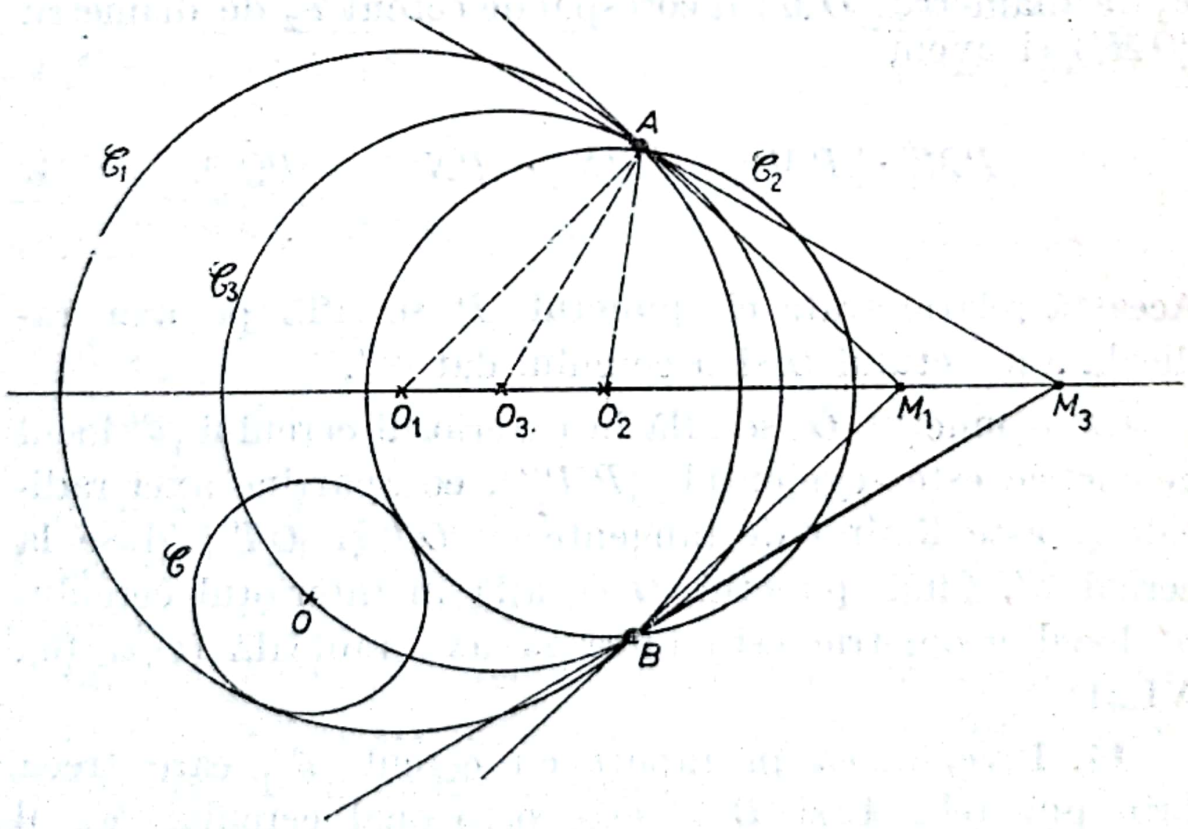


Fig. VI.22

Scanned with OKEN Scanner

Punctele de intersecție M_1, M_2, M_3 ale tangentelor în A și B duse la cercurile $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, respectiv, $\mathscr{C}_3$ se află pe linia centrelor lor, de unde rezultă că cercurile $\mathscr{C}_1$,$\mathscr{C}_2$ și $\mathscr{C}_3$ sînt asemenea.

15. Prin inversiunea de pol A cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ se transformă în dreptele d_1' și d_2' care se intersectează în punctul P_1, inversul lui P. Dreptele MM' și NN' trecînd prin polul A al inversiunii se transformă fiecare în ea însăși. Cercurile AMN' și $AM'N$ trecînd prin polul A al inversiunii se transformă în dreptele M_1N_1' și N_1M_1'.

Construcție. Prin punctul A ducem două drepte arbitrare M_1M_1' și N_1N_1' care intersectează dreptele d_1' și d_2' în punctele M_1, M_1' și, respectiv, N_1' și N_1. Locul geometric al punctelor de intersecție al dreptelor M_1N_1' și N_1M_1', pe care îl vom nota cu Q, este o dreaptă care trece prin punctul P_1, și anume este polara punctului A în raport cu unghiul ce are ca laturi dreptele d_1' și d_2'; acestei drepte îi corespunde în inversiunea dată un cerc care trece prin punctele A și P. Acest cerc va fi locul geometric al punctelor R, inversele punctelor Q, adică al punctelor de intersecție R ale cercurilor AMN' și $AM'N$.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME DE SINTEZĂ

1. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza $|BC|$ a unui triunghi dreptunghic ABC are loc relaţia

$$\|MC\|^2 \cdot \|AB\|^2 + \|MB\|^2 \cdot \|AC\|^2 = \|AM\|^2 \cdot \|BC\|^2$$

(*relaţia Van Aubel*).

2. Fie A_0, B_0, C_0; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 patru poziţii ale vîrfurilor unui triunghi obţinute prin rotirea acestuia în jurul centrului cercului circumscris. Să se demonstreze că proiecţiile intersecţiilor (A_0B_1, B_0A_2); (B_0C_2, C_0B_3); (C_0A_3, A_0C_1), respectiv, pe A_0B_0, B_0C_0 şi C_0A_0 sînt coliniare.

3. Se consideră punctul fix $A(a, 0)$ şi punctul mobil $B(0, \lambda)$. Se cere locul descris de C astfel încît triunghiul ABC să fie dreptunghic isoscel cu $|BC| \equiv |BA|$.

4. Fie ABC un triunghi echilateral şi un punct O pe paralela dusă prin A la BC $2\|AO\| \leqslant \|BC\|$. Cercul cu centrul în O, tangent la BC într-un punct I situat între B şi C, taie laturile $|AB|$ şi $|AC|$, respectiv, în M şi N (M între A şi B, iar N între A şi C). Fie P punctul în care latura $|AC|$ taie a doua oară cercul. Să se arate că:

a) Triunghiul APM isoscel şi să se calculeze în grade arcul $\widehat{MN}$.

b) Patrulaterul $AOMN$ este inscriptibil.

5. Fie unghiul xOy şi un cerc $\mathscr{C}$ tangent la laturile lui în punctele A, respectiv, B. O paralelă prin punctul A la latura Ox intersectează cercul într-un punct C, iar segmentul $|OC|$ intersectează de asemenea cercul $\mathscr{C}$ în punctul E. Să se arate că $|OM| \equiv MB|$, unde $\{M\} = OB \cap AE$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Se consideră hexagonul $ABCDEF$ înscris în cercul de centru O. Să se demonstreze că cele trei cercuri care trec prin O și prin mijloacele a două laturi opuse au un al doilea punct comun.

7. Să se afle locul geometric al simetricului focarului unei parabole față de o tangentă variabilă la acea parabolă.

8. Să se determine locul geometric al centrului ω al celor nouă puncte ale triunghiului ABC cînd B și C sînt fixe, iar A este mobil pe cercul $\mathscr{C}$ care trece prin B și C.

9. Să se construiască un triunghi ABC cînd se cunosc următoarele elemente: latura $|BC|$, unghiul $\hat{A}$, iar medianele duse din vîrfurile B și C sînt perpendiculare.

10. În cercul de rază R se înscrie pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral AEF. Să se calculeze, în funcție de R, aria figurii rezultată din suprapunerea pătratului și a triunghiului echilateral.

11. Fie punctele A, B și C pe cercul $\mathscr{C}$ de centru O și rază R, iar punctele $D \in |AB|$ și $E \in |CD|$ astfel încît $\|AD\| = m \|DB\|$ și $\|DE\| = n \|EC\|$, m și n sînt numere pozitive date. Dacă A este fix iar B și C mobile, cu vitezele $\vec{v}_B$ și $\vec{v}_C$, să se găsească viteza și locul geometric al punctului E.

12. Fie $|CD|$ o coardă mobilă a semicercului fix de centru O și diametru $|AB|$, punctul C fiind situat pe $\overset{\frown}{BD}$. Tangentele în C și D la semicerc se intersectează în T, AC și BD în Q, iar OM și CD în S (M fiind mijlocul segmentului $|BQ|$). Cercul de diametru $|OS|$ și semicercul de diametru $|AB|$ se intersectează în U. Știind că segmentele $|TQ|$ și $|AB|$ sînt perpendiculare, să se arate că:

a) Produsul $\|OM\| \cdot \|OS\|$ este constant cînd coarda mobilă $|CD|$ parcurge semicercul.

b) Punctele M, U și T sînt coliniare.

13. Fie A, B și C trei puncte oarecare ale unei elipse (E). Din centrul cercului circumscris triunghiului ABC se duc perpendiculare pe laturile triunghiului. Fie d_1, d_2, d_3 segmentele din perpendiculare cuprinse între elipsa (E) și laturile $|BC|$, $|CA|$ și $|AB|$. Să se arate că $d_1 + d_2 + d_3 \leqslant r$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

14. Pe circumferința unui cerc se consideră $2n$ puncte ($n \geqslant 3$), care împart cercul în $2n$ arce egale. Dacă n dintre cele $2n$ puncte se colorează în roșu și celelalte n se colorează în albastru, să se arate că în mulțimea triunghiurilor ce se pot forma cu vîrfurile în cele $2n$ puncte există cel puțin două triunghiuri congruente astfel încît vîrfurile unuia sînt roșii, iar ale celuilalt sînt albastre.

15. Fie OAB un triunghi dreptunghic isoscel. Se dă triunghiului o rotație de centru O și unghi $\alpha = 30°$. Să se calculeze aria comună a triunghiurilor, dacă cateta triunghiului dreptunghic este egală cu a.

16. Unghiurile unui triunghi ABC sînt proporționale cu 1,3, 4. Să se arate că :

a) Înălțimea și mediana corespunzătoare unghiului celui mai mare sînt simetrice față de bisectoarea acestui unghi.

b) Dacă în triunghiul ABC mediana și înălțimea din A sînt simetrice față de bisectoarea interioară a unghiului A, rezultă că măs $(\hat{A}) = 90°$.

17. Fie $ABCD$ un pătrat și $A'B'C'D'$ omoteticul său în omotetia de centru E și raport $k(AB \| A'B'$, etc). Se rotește pătratul $A'B'C'D'$ în jurul lui A' cu un unghi $\alpha = 180°$ și se obține pătratul $A'B_2C_2D_2$. $AA' \cap BB' \cap CC' \cap DD' = \{E\}$. Să se arate că :

a) Dreptele AA', BB_2, CC_2 și DD_2 sînt concurente într-un punct F.

b) Punctele E și F sînt conjugate față de A și A'.

18. Fie pătratul $ABCD$ de latură $a = 3$ cm. Se duce diagonala $|AC|$. O paralelă la $|BC|$ întîlnește pe $|AB|$, $|AC|$ și $|CD|$, respectiv, în L, M și N.

a) Să se determine poziția acestei paralele astfel ca rotind pătratul în jurul laturii $|CD|$ volumul format prin rotirea triunghiului ALM să fie egal cu volumul format prin rotirea triunghiului MNC.

b) Se unesc mijloacele laturilor pătratului $ABCD$ și se obține patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$, apoi mijloacele acestuia, obținîndu-se patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$ ș.a.m.d. Să se afle suma ariilor patrulaterelor $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ..., ..., $A_nB_nC_nD_n$ și suma perimetrelor cînd $n \to \infty$.

19. Fie d_1 și d_2 două drepte oarecare din spațiu. O dreaptă d_3 intersectează pe d_1 în A și este perpendiculară pe ea. Fie π un plan care se rotește în jurul dreptei d_3.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere locul geometric al intersecțiilor proiecțiilor dreptelor d_1 și d_2 pe planul π.

20. Fie M un punct mobil pe segmentul $|A_1B_1|$. Pe $|MA_1|$ și $|MB_2|$ ca laturi se construiesc de o parte și de alta a segmentului poligoane regulate cu n laturi.

Să se arate că:

a) Locul geometric al vîrfurilor celor două poligoane este format din două fascicole de drepte paralele.

b) Transformarea care leagă cele două poligoane este o omotetie ale cărei elemente se vor preciza.

21. Se dau două sfere $\mathscr{S}$ și $\mathscr{S}_1$ de centru O, respectiv, O_1 și de raze R și R_1. Să se arate că există două inversiuni care transformă sfera $\mathscr{S}$ în sfera $\mathscr{S}_1$.

22. Să se construiască un triunghi oarecare cunoscînd pozițiile în plan a centrului de greutate G, a centrului cercului înscris, precum și poziția punctului de contact a cercului înscris cu una din laturi.

23. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Se construiesc triunghiurile echilaterale ABM, CDP, BCN și ADQ, primele două în exteriorul patrulaterului, celelalte două către interior. Să se demonstreze că $|MN| \equiv |AC|$. Ce se poate spune despre figura $MNPQ$?

24. În interiorul unui pătrat dat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM și DAN. Să se demonstreze că mijloacele celor patru segmente $|KL|$, $|LM|$, $|MN|$, $|NK|$ și mijloacele celor opt segmente $|AK|$, $|BK|$, $|BL|$, $|CL|$, $|CM|$, $|DM|$, $|DN|$, $|AN|$ sînt cele 12 vîrfuri ale unui dodecagon regulat.

(Olimpiada Internațională de Matematică, Belgrad 1977.)

25. Fie punctele P, A și B situate în această ordine pe o dreaptă d. Fie un punct variabil C pe mediatoarea segmentului $|AB|$. Cercul ABC taie dreapta PC în punctul D și retaie mediatoarea în punctul C'. Să se găsească locul geometric al punctului D cînd punctul C descrie mediatoarea $|CC'|$ a segmentului $|AB|$.

26 Două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ cu $r_1 \equiv r_2$ se intersectează după coarda comună $|AB|$. Fie $\mathscr{C}_1'(O_1', r_1')$ și $\mathscr{C}_2'(O_2', r_2')$ două cercuri cu $r_1' \equiv r_2'$, tangente exterioare în punctul A și care intersectează cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$, respectiv, în punctele C, D și E, F. Să se demonstreze că $|AB|$, $|CD|$ și $|EF|$ sînt concurente.

27. Se dă triunghiul dreptunghic ABC (măs $\hat{A} = 90°$) și $AA_1 \perp BC$. Fie A_1' și A_1'' simetricele punctului A_1 în

raport cu laturile $|AB|$, respectiv, $|AC|$. Să se arate că punctele A_1', A și A_1'' sînt coliniare.

28. Fie cercul $\mathscr{C}$ de centru fix O, două puncte fixe A, B și o dreaptă d care trece prin A și intersectează cercul în punctele C și D. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului ce unește punctul fix B cu mijlocul coardei $|CD|$, cînd dreapta d se rotește în jurul punctului fix A.

29 Se dă triunghiul ABC și H punctul de intersecție al înălțimilor $|AA_1|$, $||BB_1|$ și $|CC_1|$. Cercul AB_1HC_1 taie segmentele $|A_1B_1|$ și $|A_1C_1|$, respectiv, în D și E. Să se demonstreze că

$$|A_1B_1| \equiv |A_1E| \text{ și } |A_1D| \equiv |A_1C_1|.$$

30. Se dă un pătrat $ABCD$. Două puncte M și N parcurg conturul pătratului în sens trigonometric pornind din vîrful A, respectiv, B cu aceeași viteză. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$. Generalizare pentru un poligon regulat cu n laturi.

31. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca trei puncte P, Q, R, situate, respectiv, pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale unui triunghi oarecare ABC, să fie coliniare este ca $|PB| / |PC| \cdot |QC| / |QA| \cdot |RA| / |RB| = 1$ (*teorema lui Menelaus*).

32. Într-un patrulater convex înscris în cerc, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse (*teorema lui Ptolemeu*).

33. Să se arate că într-un triunghi, mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfurile triunghiului și ortocentrul sînt situate pe același cerc (numit *cercul lui Euler*).

Centrul cercului circumscris, centrul de greutate, centrul cercului lui Euler și ortocentrul triunghiului sînt coliniare (*dreapta lui Euler*).

34. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct în planul triunghiului. Să se construiască un triunghi ale cărui laturi să fie congruente cu distanțele $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$ (*teorema lui Pompeiu*).

35. Să se demonstreze că cercul celor nouă puncte al unui triunghi este tangent cercului înscris și cercurilor exînscrise triunghiului (*teorema lui Feuerbach*).

36. Prin vîrful B al triunghiului ABC se duc două drepte simetrice în raport cu bisectoarea unghiului B, care

Scanned with OKEN Scanner

intersectează latura $|AC|$ în punctele D și E. Să se demonstreze că

$$\frac{\|BC\|^2}{\|BA\|^2} = \frac{\|CD\| \cdot \|CE\|}{\|AD\| \cdot \|AE\|} \quad \textit{(teorema lui Steiner)}.$$

37. Să se demonstreze că dacă în triunghiul ABC se consideră pe laturile lui punctele A_1, B_1, C_1 care le împart în același raport, atunci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate *(teorema lui Pappus)*.

38. Dacă $MPM'Q$ este un romb articulat, iar O un punct fix în planul său astfel încît $|OP|$ și $|OQ|$ să fie congruente și constante, atunci M și M' vor descrie două figuri inverse una față de cealaltă (*inversorul lui Peaucelier*).

Soluții. Indicații

1. Considerăm triunghiul oarecare ABC și se aplică inversiunea de pol A și putere k. Punctele B, C se transformă în B', respectiv, C', dreapta BC se transformă în cercul circumscris triunghiului $AB'C'$, iar punctul M în M', unde dreapta AM taie cercul circumscris triunghiu lui $AB'C'$. Condiția necesară și suficientă ca măs $(\hat{A}) = 90°$ este echivalentă cu măs $(\widehat{B'M'C'}) = 90°$ sau cu relația

$$|M'B'\|^2 + \|M'C'\|^2 = \|B'C'\|^2. \qquad (1)$$

Însă

$$\|M'B'\| = \|MB\| \frac{k}{\|AM\| \cdot \|AB\|};$$

$$\|M'C'\| = \|MC\| \frac{k}{\|AM\| \cdot \|AC\|};$$

$$\|B'C'\| = \|BC\| \frac{k}{\|AB\| \cdot \|AC\|}.$$

Înlocuind în (1) și împărțind cu k^2 rezultă relația cerută.

2. Notăm cu A'', B'' și C'' proiecțiile din enunț, cu $\hat{\alpha} = \widehat{B_0A_0B_1} \equiv \widehat{C_0A_0C_1}$, cu $\hat{\beta} \equiv \widehat{C_0B_0C_2} \equiv \widehat{A_0B_0A_2}$ și cu $\hat{\gamma} =$

$\equiv \widehat{A_0C_0A_2} \equiv \widehat{B_0C_0B_3}$ (vezi fig. VII.1). Notînd cu A' intersecția dreptelor B_0C_2 și C_0B_3 avem

$$\frac{\|A''C_0\|}{\|A''B_0\|} = \frac{\|A''A'\|}{\|A''B_0\|}\,\frac{\|A''C_0\|}{\|A''A'\|} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$$

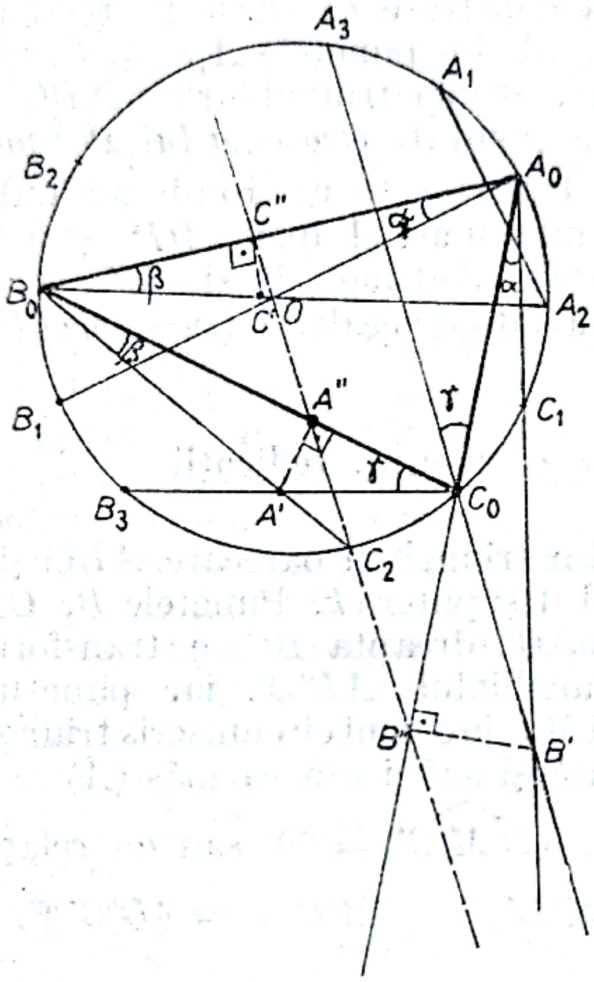


Fig. VII.1

și analog găsim

$$\frac{\|B''A_0\|}{\|B''C_0\|} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha} \text{ și } \frac{\|C''B_0\|}{\|C''A_0\|} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Din $\dfrac{\|A''C_0\|}{\|A''B_0\|}\cdot\dfrac{\|B''A_0\|}{\|B''C_0\|}\cdot\dfrac{\|C''B_0\|}{\|C''A_0\|} = +1$ rezultă, conform teoremei lui Menelaus, că punctele A'', B'' și C'' sînt coliniare.

3. Observăm că pentru fiecare punct $B \in Oy$ există două puncte C și C' astfel ca triunghiurile ABC și ABC'

Scanned with OKEN Scanner

să fie dreptunghice isoscele în care $|BA| \equiv |BC|$, respectiv, $|BA| \equiv |BC'|$, (vezi fig. VII.2).

Pe segmentele $|AC|$ și $|AC'|$ considerăm punctele F și F' astfel încît $|AB| \equiv |AF| \equiv |AF'|$, puncte ce sînt transformatele punctului B prin rotațiile de același centru

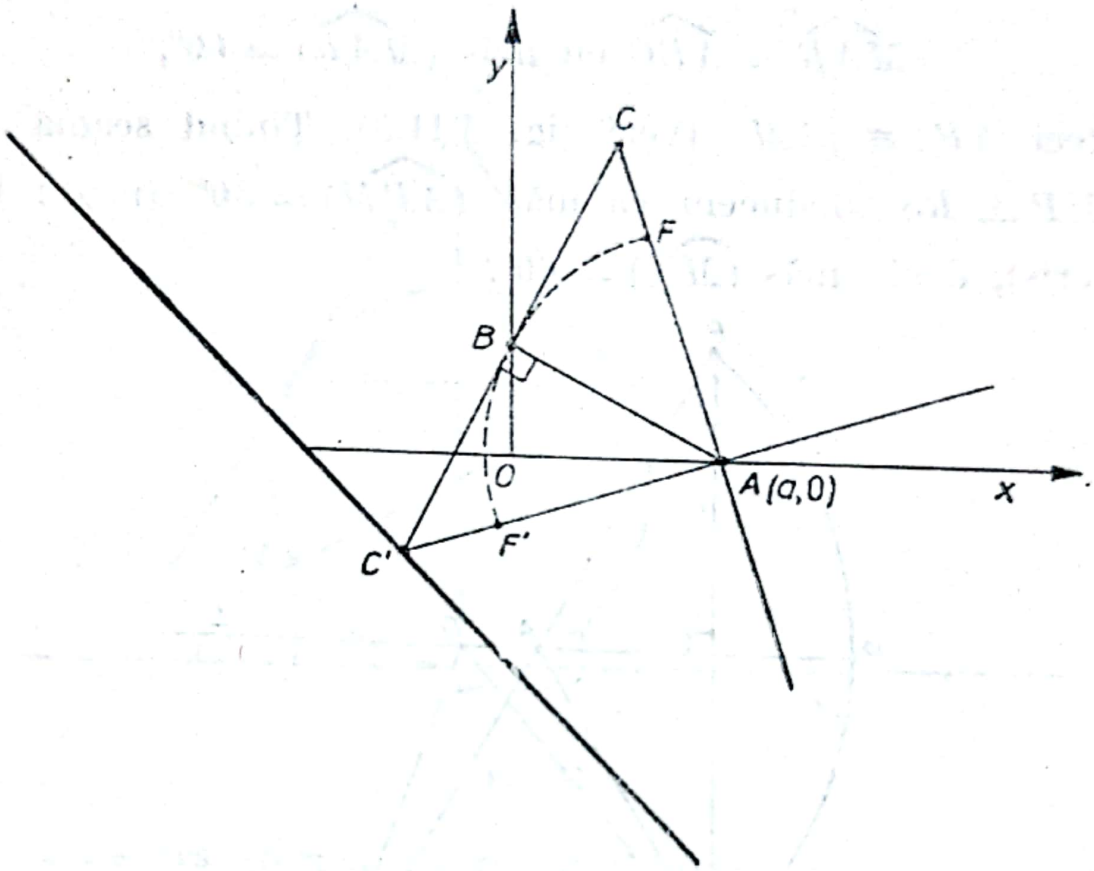


Fig. VII.2

A și de unghi de măsură egal cu 45°. Deoarece punctul B descrie axa Oy, rezultă că punctele F și F' vor descrie două drepte (transformatele axei Oy prin rotațiile menționate). Punctele C și C' sînt transformatele punctelor F și F' prin omotetia de centru A și putere 2. Rezultă că C și C' vor descrie două drepte (transformatele dreptelor descrise de F și F' prin omotetia menționată). Aceste drepte sînt paralele cu prima, respectiv, a doua bisectoare a unghiului xOy, și atunci ecuațiile lor vor fi

$$y = x + n \quad \text{și} \quad y = -x + n'.$$

Pentru $B = O$ obținem $C(0, a)$ și $C'(0, -a)$, deci $n = a$ și $n' = -a$. Rezultă că locul geometric căutat este format din dreptele $y = x + a$ și $y = -x - a$.

Scanned with OKEN Scanner

4. a) Deoarece axa de simetrie RS a cercului cu centrul în O, situat între proiecțiile lui B și C pe RS, este paralelă cu BC, rezultă că :

$$\widehat{RAP} \equiv \widehat{BCA} \text{ cu măs } (\widehat{RAP}) = 60^\circ;$$

$$\widehat{MAR} \equiv \widehat{ABC} \text{ cu măs } (\widehat{MAR}) = 60^\circ,$$

deci $|AP| \equiv |AM|$ (vezi fig. VII.3). Ținînd seama că $MP \perp RS$ deducem că măs $(\widehat{APM}) = 30^\circ$ (unghi înscris), deci măs $(\overset{\frown}{MN}) = 60^\circ$.

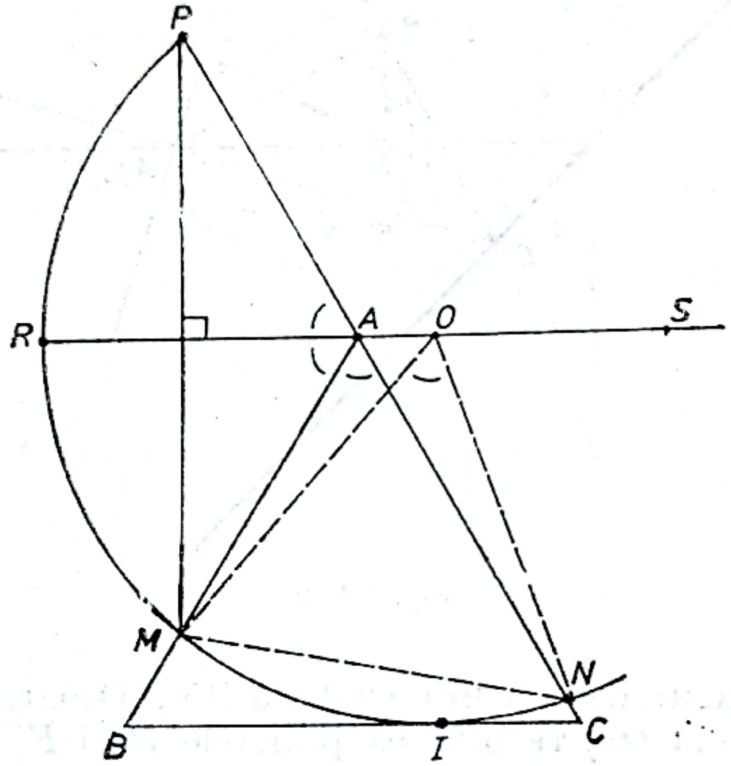


Fig. VII.3

b) Din măs $(\overset{\frown}{MN}) = 60^\circ$ rezultă că $\widehat{NAM} \equiv \widehat{NOM}$, adică patrulaterul $OAMN$ este inscriptibil.

5. Tangenta la cerc în punctul C intersectează laturile Ox și Oy în punctele N, respectiv, P. În triunghiul ONP dreapta PB este axă de simetrie, de unde rezultă că $|OB| \equiv |BN| \equiv |NC| \equiv |AO|$ (vezi fig.VII.4). Deoarece $\widehat{NOC} \equiv \widehat{OCA}$ (unghiuri alterne interne) și $\widehat{OCA} \equiv$ $\equiv \widehat{OAM} = \overset{\frown}{AE}/2$, rezultă că $\widehat{NOC} \equiv \widehat{OAM}$. Cum

$|OA| \equiv |NC|$ rezultă că triunghiurile NOC și OAM sînt asemenea și vom avea $\|OM\| / \|NC\| = \|OA\| / \|ON\| = 1/2$; dar $|NC| \equiv |OB|$ și atunci $\|OM\| / \|OB\| = 1/2$, adică $|OM| \equiv |MB|$.

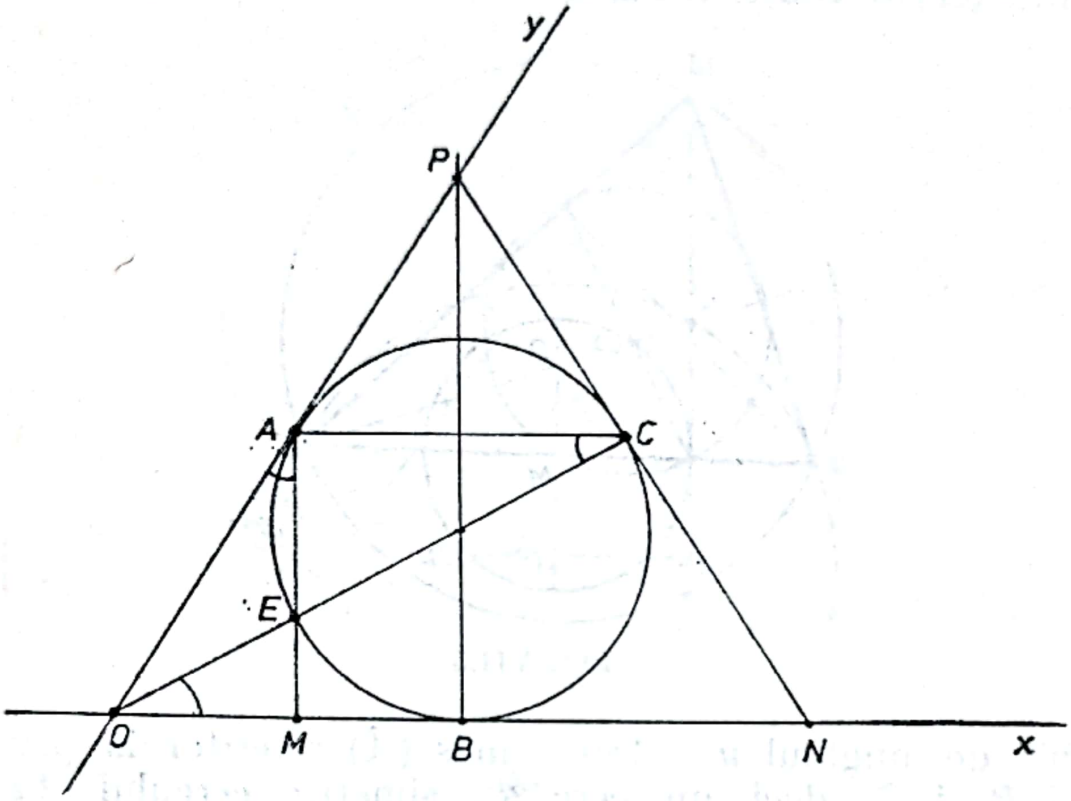


Fig. VII.4

6. Se transformă figura prin inversiunea de pol O, și putere egală cu pătratul razei cercului O. Punctele a, b c, d, e și f fiind mijloacele laturilor hexagonului $ABCDEF$ inversele lor formează un hexagon $a'b'c'd'e'f'$ circumscris cercului O. Inversele celor trei cercuri sînt dreptele $a'd'$, $b'c'$ și $c'f'$, care sînt concurente conform teoremei lui Brianchon.

7. Fie parabola $(F, \mathrm{d}, p) = P$. Fie $M \in P$ și $N \in \mathrm{d}$ astfel încît $|NM| \equiv |MF|$. Avem $MN \perp \mathrm{d}$. Fie $R = \mathrm{pr}_\Delta F$ și S simetricul lui F față de dreapta Δ. Dreapta Δ fiind tangentă în M, ea este și bisectoarea unghiului $\widehat{NMF}$. Din $|NM| \equiv |MF|$ rezultă că triunghiul NMF este isoscel. Prin urmare bisectoarea este mediatoare și atunci $N \equiv S$. Locul geometric căutat este deci întreaga directoare.

8. Cînd A aparține cercului fix ce trece prin B și C, centrul O al cercului ce trece prin ABC va fi fix (vezi

Scanned with OKEN Scanner

fig. VII.5). Cum $|H\,\omega| \equiv |\omega O|$ locul lui ω va fi omoteticul de centru O și raport $1/2 = \|O\omega\| / \|OH\|$ al locului lui H, cînd A este mobil pe cercul $\mathscr{C}$. Dar măs $(\widehat{BHC}) = 180° -$ $-$măs $(\hat{A})$ = const. Rezultă că locul lui H este arcul ca-

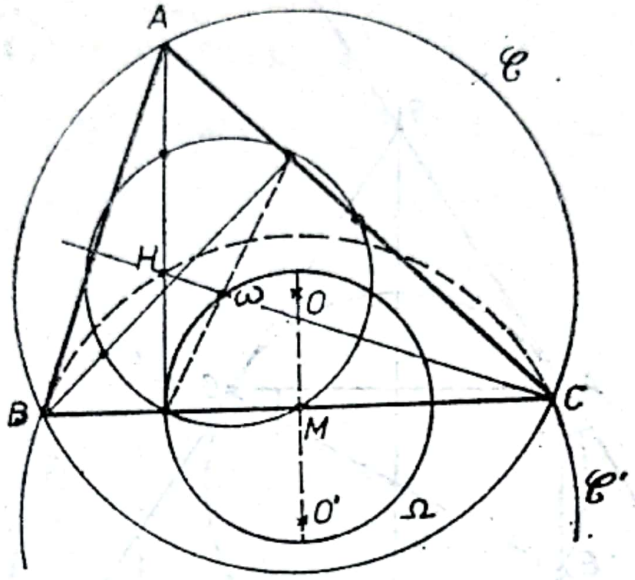


Fig. VII.5

pabil de unghiul $u = 180° -$ măs $(\hat{A})$ referitor la punctele B și C, deci un cerc $\mathscr{C}'$, simetric cercului ABC față de $|BC|$ care trece prin B și C. Locul lui ω va fi deci tot un cerc, Ω, de rază jumătate din raza cercului $\mathscr{C}$. Centrul lui va fi punctul M, care este mijlocul lui $|BC|$ deoarece centrele O și O' ale cercurilor $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}'$ sînt simetrice față de BC.

9. Considerăm în triunghiul ABC dată latura $|BC|$ și medianele duse din B și C, care sînt perpendiculare (vezi fig. VII.6). Observăm că centrul de greutate al triunghiului se găsește pe cercul de diametru $|BC|$. Pentru mediana $|AA'|$ avem relația $\|AA'\| = 3\,\|A'G\|$. Vîrful A al triunghiului ABC aparține cercului cu centru în A' și de rază $\frac{3}{2}\|BC\|$. Dacă presupunem cunoscute latura $|BC|$ și unghiul $\hat{A}$, fără a lua în considerație condiția a treia, atunci locul geometric al vîrfului A este compus din două arce de cerc simetrice față de segmentul $|BC|$. Realizăm construcția care constă în următoarele: Con-

struim cercul de diametru $|BC|$, apoi construim un cerc concentric cu primul și de rază $r = \frac{3}{2}\|BC\|$, după care construim locul geometric al punctelor din care segmen-

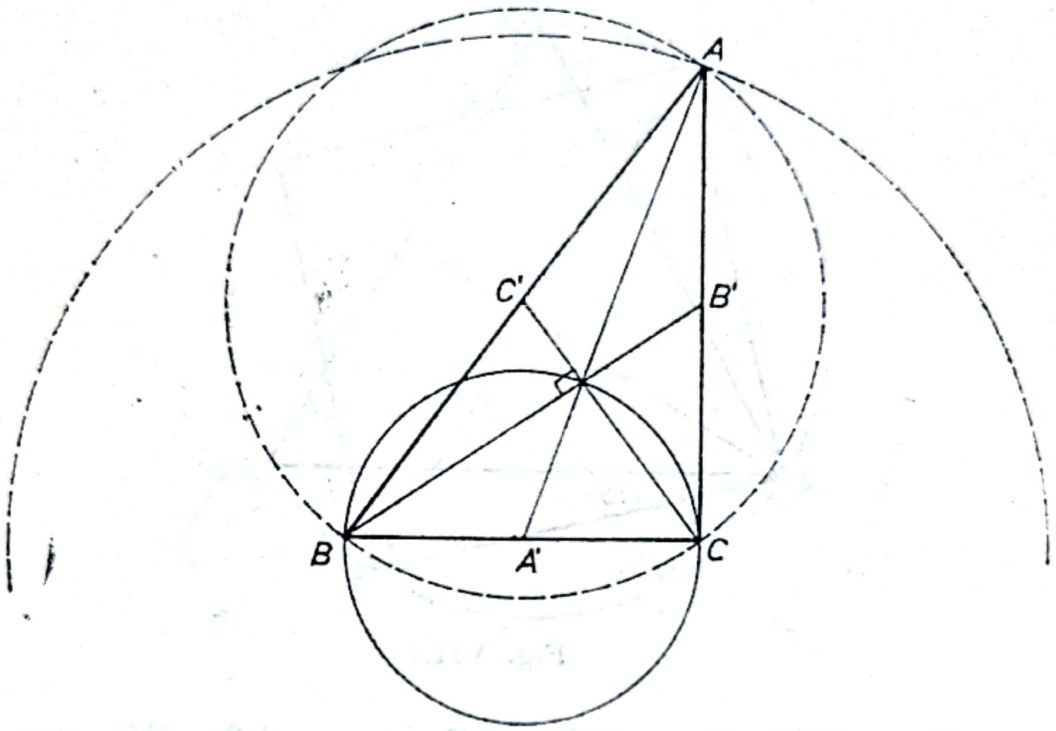


Fig. VII.6

tul $|BC|$ se vede sub unghiul $\hat{A}$. Punctul de intersecție al arcelor de cerc și al cercului cu centrul în A' de rază $\frac{3}{2}\|BC\|$ este vîrful al treilea, A, al triunghiului căutat. Arcele de cerc descrise de vîrful A fiind simetrice față de $|BC|$ este suficient să se considere arcul de deasupra dreptei BC. Condiția ca problema să aibă soluție este ca

$$\frac{\|BC\|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\hat{A}}{2} \geqslant \frac{3}{2}\|BC\|.$$

Problema poate avea una sau două soluții.

10. Pătratul $ABCD$ și triunghiul AEF avînd punctul A comun rezultă că $FE \| BD$ iar $AC \| EF$. Dar AC este axă de simetrie (vezi fig. VII.7) și atunci

$$S_{ABG} = \frac{R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} \operatorname{tg} 15^\circ}{2} = R^2 \operatorname{tg} 15^\circ.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog

$$S_{ADK} = R^2 \operatorname{tg} 15^\circ, \quad S_{CNI} = \frac{\|NI\| \cdot \|CL\|}{2} = \frac{R^2}{4};$$

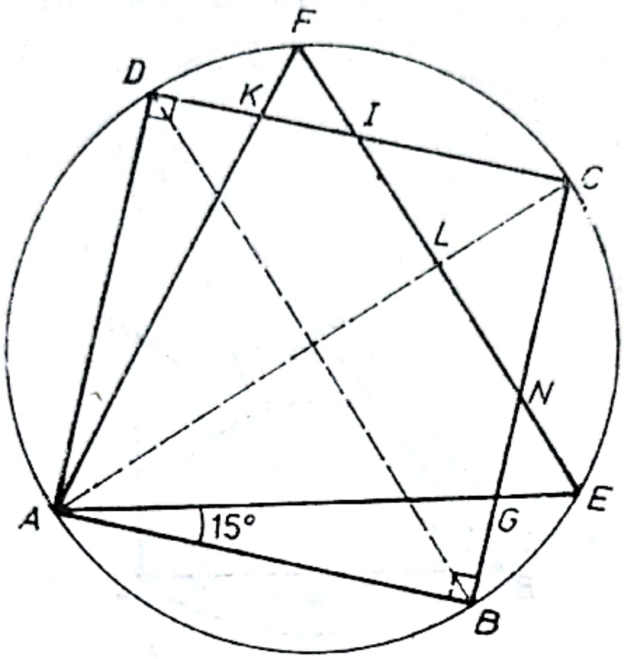


Fig. VII.7

$\{N\} = BC \cap EF$, $\{I\} = CD \cap EF$, $\{L\} = AC \cap EF$. Atunci

$$S = (R\sqrt{2})^2 - 2R^2 \operatorname{tg} 15^\circ - \frac{R^2}{4}.$$

11. Dacă punctul A este fix iar punctul B mobil și se deplasează cu viteza $\vec{V}_B$ pe cercul dat $\mathscr{C}$, punctul D descrie cercul $\mathscr{C}_1(O_1, R_1)$, cu $R_1 = R\dfrac{m}{m+1}$ direct omotetic cu cercul $\mathscr{C}$, avînd raportul de omotetie $\dfrac{m}{m+1}$ și centrul de omotetie în A. Centrul O_1 se află pe $|AO|$ astfel că $\|AO_1\| / \|O_1O\| = m$. Cercul $\mathscr{C}_1$ este tangent cu $\mathscr{C}$ în punctul A, deoarece centrul de omotetie A se află pe ambele cercuri (vezi fig. VII.8).

Punctul D are viteza $\vec{V}_D = \vec{V}_B \dfrac{m}{m+1}$. Dacă punctele A și B sînt fixe, iar C este mobil, cu viteza $\vec{V}_C$, punctul E va descrie cercul $\mathscr{C}_2(O_2, R_2)$, cu $R_2 = R\dfrac{n}{n+1}$,

direct omotetic cu cercul $\mathscr{C}$, cu raportul de omotetie $\frac{n}{n+1}$ și centrul de omotetie în D. Centrul O_2 al cercului $\mathscr{C}_2$ se află pe $|DO|$ astfel încît $\|DO_2\| / \|O_2O\| = n$.

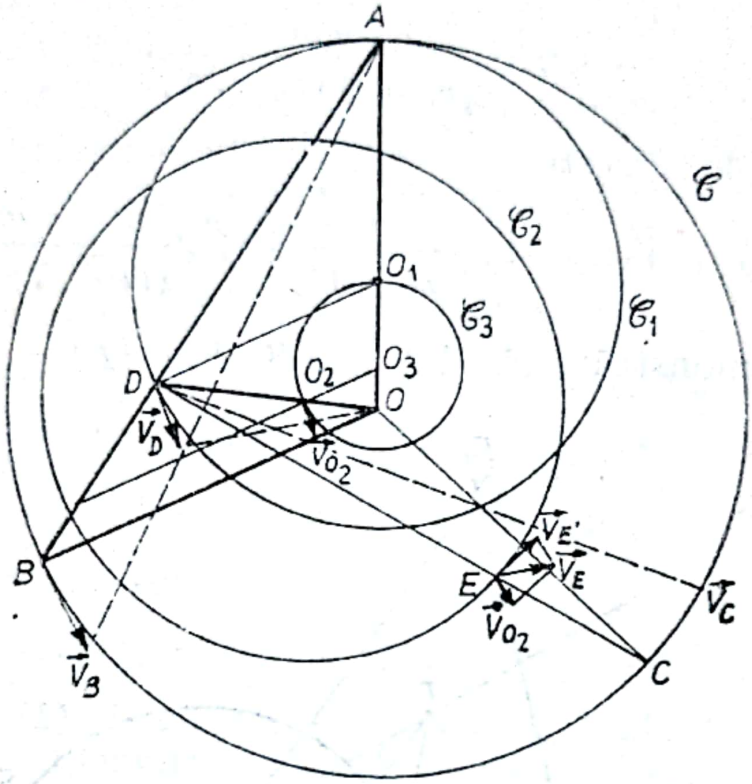


Fig. VII.8

Punctul E are viteza $\vec{V}'_E = \vec{V}_C \frac{n}{n+1}$. Dacă punctul A este fix iar B și C mobile, cu viteza $\vec{V}_B$, respectiv, $\vec{V}_C$, atunci centrul O_2 va descrie cercul $\mathscr{C}_3(O_3, R_3)$, cu $R_3 = R_1 \frac{1}{n+1} = R \frac{m}{(m+1)(n+1)}$, cu centrul pe $|OO_1|$, astfel încît $\|OO_3\| / \|O_3O_1\| = 1/n$

Punctul O_2 are viteza $\vec{V}_{O_2} = \vec{V}_D \frac{1}{n+1} = \vec{V}_B \frac{m}{(m+1)(n+1)}$, deci circumferința cercului $\mathscr{C}_2$ pe care se află punctul E este cuprinsă în coroana circulară (K) de raze $R_4 = |R_2 + R_3|$ și $R_5 = |R_2 - R_3|$ și cu centrul în O_3. Înlocuind valorile lui R_2 și R_3 obținem

$$R_4 = R \frac{mn + m + n}{(m+1)(n+1)}, \qquad R_5 = R \frac{mn - m + n}{(m+1)(n+1)}.$$

Deci $R_5 = 0$, adică coroana se reduce la un cerc, dacă $n = m/n + 1$.

Aria coroanei (K) este

$$\pi(R_4^2 - R_5^2) = \pi[(R_2 + R_3)^2 - |R_2 - R_3|^2] =$$

$$= 4\pi R^2 \frac{mn}{(m+1)(n+1)}.$$

Viteza lui E este

$$\vec{V}_E = \vec{V}'_E + \vec{V}_{O_2} = \vec{V}_C \frac{n}{n+1} + \vec{V}_B \frac{m}{(m+1)(n+1)}.$$

12. Demonstrăm că $TQ \perp AB$. Fie $\{F\} = AD \cap BC$.

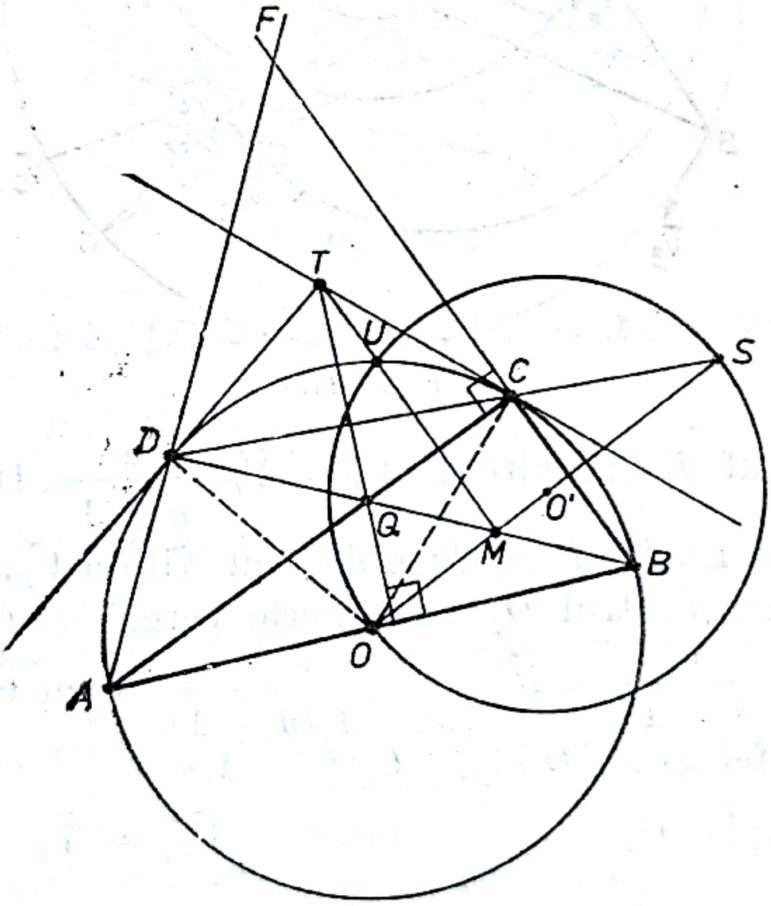


Fig. VII.9

Din $BD \perp AD$ și $AC \perp BC$ rezultă că Q este ortocentrul triunghiului FAB, iar din $TC \perp OC$ și $TD \perp OD$ rezultă că T este mijlocul segmentului $|FQ|$, deci $|OT|$ este diametru în cercul lui Euler al triunghiului ABF, cerc pe care îl notăm cu γ (vezi fig. VII.9). Întrucît FQ

Scanned with OKEN Scanner

este înălțime în triunghiul FAB iar $T \in FQ$ rezultă că $TQ \perp AB$.

Punctele O, M, C, T și D sînt conciclice și aparțin cercului lui Euler γ, iar

$$TM \perp OM \tag{1}$$

deoarece $|OT|$ este diametru în cercul γ.

a) Notăm cu I inversiunea de pol O și putere $\|OA^2\|$. Punctele C și D aparținînd cercului de inversiune de diametru $|AB|$ rezultă că

$$I(C) = C \text{ și } I(D) = D. \tag{2}$$

Deducem că $I(\gamma)$ este dreapta CD. Prin urmare

$$I(M) = I[(OM \cap \gamma) \setminus \{O\}] = I[(OM)] \cap$$

$$\cap [I(\gamma)] = OM \cap CD = \{S\},$$

deci $I(M) = S$, adică

$$\|OM\| \cdot \|OS\| = \|OA\|^2 = \text{const.} \tag{3}$$

b) Din (1) și (3) deducem că $OS \perp TM$, deci inversa cercului de diametru $|OS|$ este dreapta TM. Întrucît U aparține cercului de diametru $|OS|$ a cărui inversă este dreapta TM, obținem că

$$I(U) \in TM. \tag{4}$$

Deoarece punctul U aparține cercului de diametru $|AB|$ rezultă că

$$I(U) = U. \tag{5}$$

Din (4) și (5) rezultă că punctele M, U și T sînt coliniare.

13. Fie O_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, punctele de intersecție ale dreptelor OM, ON și OP cu elipsa (E). Arătăm că O_i coincid cu simetricele lui O în raport cu laturile triunghiului ABC (vezi fig. VII.10).

Fie O_i', $i \in \{1, 2, 3\}$, simetricele lui O față de BC, CA și AB. Avem

$$|OM| \equiv |MO_1'|, |MB| \equiv |MC| \text{ și } OO_1' \perp BC.$$

Prin urmare patrulaterul $OBO_1'C$ este romb. Analog arătăm că $OAO_3'B$ și $OAO_2'C$ sînt romburi. Deci perechile de drepte (AO_2', BO_1'), (AO_3', CO_1') și (BO_3', CO_2') sînt paralele.

Scanned with OKEN Scanner

Conform teoremei lui Pascal prin punctele A, B, C și O_i', trece elipsa (E). Deoarece semidreptele $|OM$, $|ON$ și $|OP$ taie elipsa în trei puncte și $O_1 \in |OM$, $O_2' \in |ON$,

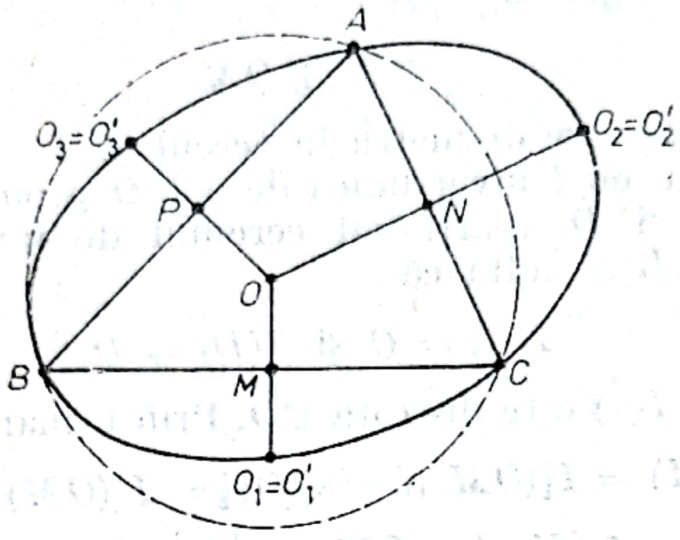


Fig. VII·10

$O_3 \in |OP$ iar $O_i' \in (E)$, rezultă că $O_i = O_i'$,. Dar într-un triunghi ABC are loc relația $\|OM\| + \|ON\| + \|OP\| = R + r$, numită *relația lui Carnot*. Din faptul că O_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ sînt simetricele lui O față de BC, CA și AB rezultă că $|OM| \equiv |O_1M| = d_1$, $|ON| \equiv |O_2N| = d_2$ și $|OP| \equiv |O_3P| = d_3$ și deci $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$. Deoarece $R \geqslant 2r$ (*inegalitatea lui Euler*), rezultă că $d_1 + d_2 + d_3 < r$.)

14. Dacă există cel puțin trei diametre ale căror extremități sînt colorate diferit, atunci există două triunghiuri simetrice față de centrul cercului cu vîrfurile colorate cu roșu, respectiv, albastru. În caz contrar se arată că există două triunghiuri dreptunghice care verifică condițiile cerute.

15. După rotire, aria comună este patrulaterul $OEFG$ (vezi fig. VII.11). Se arată că $\Delta OEF \equiv \Delta OFG$, de unde rezultă că aria căutată este egală cu de două ori aria triunghiului OFE. Se obține $S_{OEFG} = a^2(2 - \sqrt{3})$.

16. a) $$\frac{\text{măs}(\hat{A})}{1} = \frac{\text{măs}(\hat{B})}{3} = \frac{\text{măs}(\hat{C})}{4} =$$

$$= \frac{\text{măs}(\hat{A}) + \text{măs}(\hat{B}) + \text{măs}(\hat{C})}{8} = \frac{180^\circ}{8} = 22^\circ 30',$$

Scanned with OKEN Scanner

deci măs $(\hat{A}) = 22°30'$, măs $(\hat{B}) = 3 \cdot 22°30' =$

$= 67°30'$ şi măs $(\hat{C}) = 4 \cdot 22°30' = 90°$.

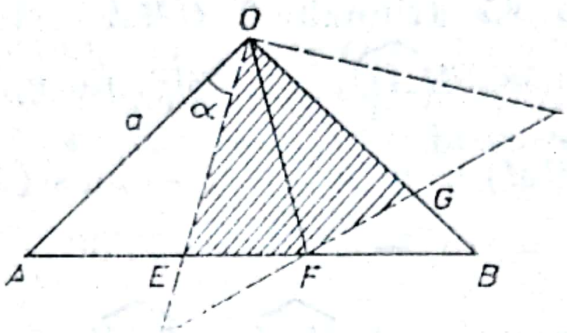


Fig. VII.11

Fie $|CI|$, $|CH|$ şi $|CM|$, bisectoarea, înălţimea şi, respectiv, mediana corespunzătoare unghiului drept al triunghiului ABC ($I \in |AB|$; $H \in |AB|$; $M \in |AB|$); (v. fig. VI. 12). Segmentul $|CI|$ fiind bisectoarea unghiului C rezultă că $\widehat{ICB} \equiv \widehat{ICA}$, cu măs $(\widehat{I} \quad) = 45°$. Segmentul $|CH|$ fiind înălţimea din C rezultă că $(\widehat{BHC}) \equiv$

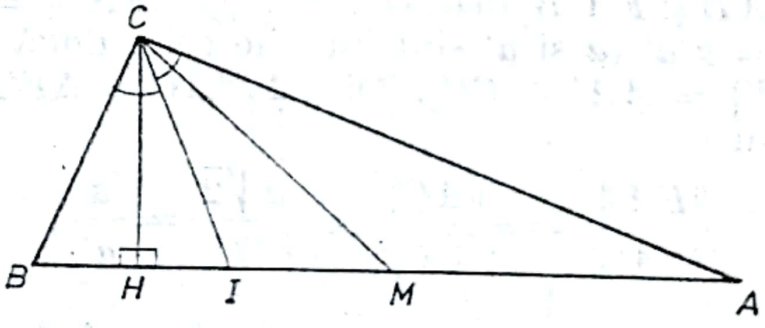


Fig. VII.12

$\equiv (\widehat{AHC})$, cu măs $(\widehat{AHC}) = 90°$. De asemenea, segmentul $|CM|$ fiind mediana corespunzătoare ipotenuzei înseamnă că

$$|AM| \equiv |BM| \equiv |CM| \qquad (1)$$

În triunghiul dreptunghic BHC (măs $(\hat{H}) = 90°$) avem

măs $(\widehat{BCH}) =$ 90° — măs $(\widehat{HBC}) = 90° - 67°30' = 22°30'$.

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{măs}\,(\widehat{ICH}) = \text{măs}\,(\widehat{ICB}) - \text{măs}\,(\widehat{BCH}) = 45° - 22°30' = 22°30'. \quad (2)$$

Din (1) rezultă că triunghiul CMA este isoscel, deci $\text{măs}\,(\widehat{MCA}) = \text{măs}\,(\widehat{MAC}) = 22°30'$, de unde

$$\text{măs}\,(\widehat{ICM}) = \text{măs}\,(\widehat{ICA}) - \text{măs}\,(\widehat{MCA}) = 45° - 22°30' = 22°30'. \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă că $\widehat{HCI} \equiv \widehat{ICM}$, deci $|CH|$ (înălțimea) și $|CM|$ (mediana) sînt simetrice față de $|CI|$ (bisectoarea)

b) Vom stabili următoarele relații :

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \text{ și } \cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Demonstrația este imediată scriind definiția funcțiilor trigonometrice sinus și cosinus într-un triunghi dreptunghic și ținînd seama că unghiurile ascuțite ale triunghiului sînt complementare.

17. a) Fie $\{F\} = AA' \cap BB_2$. Din asemănarea triunghiurilor FAB și $FA'B_2$ deducem $\|FA\| / \|FA'\| = \|AB\| / \|A'B_2\| = a/a'$ (a și a' sînt laturile celor două pătrate).

Fie $\{F'\} = AA' \cap CC_2$. Din $\Delta F'AC \sim \Delta F'A'C_2$ ($AC \| A'C_2$) avem

$$\frac{\|FA\|}{\|F'A'\|} = \frac{\|AC\|}{\|A'C_2\|} = \frac{a\sqrt{2}}{a'\sqrt{2}} = \frac{a}{a'},$$

deci punctul F coincide cu F'. La fel arătăm că DD_2 trece prin F (vezi fig. VII.13).

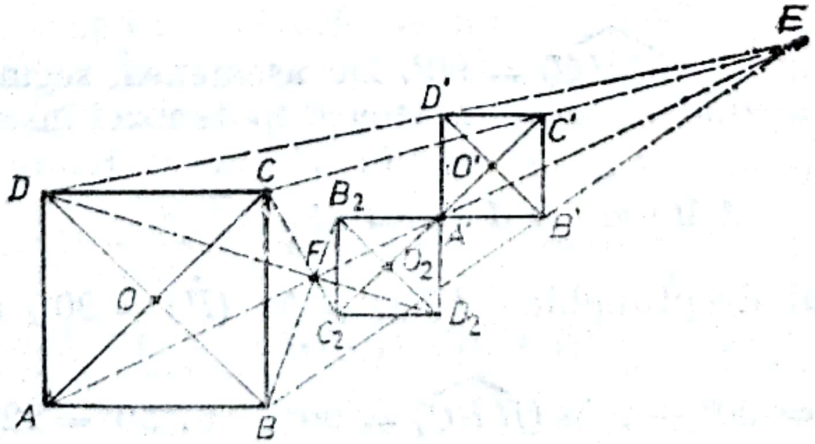


Fig. VII.13

b) Am arătat că $\|FA\| / \|F'A'\| = a/a'$. Din $\Delta EAB \sim \Delta EA'B'$ rezultă $\|EA\| / \|EA'\| = \|AB\| / \|A'B'\| = a/a'$, ceea ce arată că punctele E și F sînt conjugate față de punctele A și A'.

Centrul de omotetie E se află pe linia centrelor OO' iar F aparține liniei centrelor OO_2. Rezultă că fascicolul $O(AO_2A'O')$ este armonic și dacă $A' \in BD$ atunci $OA \perp OA'$. Deci $|OA|$ și $|OA'|$ sînt bisectoarele unghiului O_2OO'.

18. a) $\|AL\| = x$ determină poziția paralelei (vezi fig. VII.14). Avem

$$V(ALM) = \pi a^2 x - V(AMND) = \pi a^2 x -$$

$$- \frac{\pi x}{3} [a^2 + (a - x)^2 + a(a - x)] =$$

$$= a^2 x - \frac{(3a^2 x - 3ax^2 + x^3)}{3} = \frac{x^2(3a - x)}{3},$$

$$V(MNC) = \frac{(a - x)^3}{3},$$

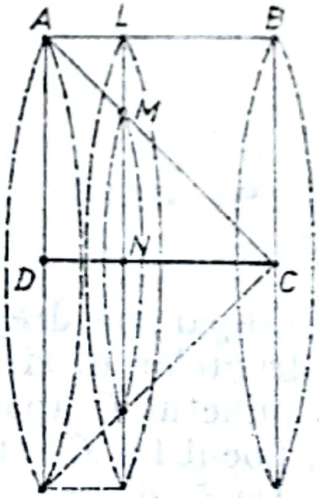


Fig. VII.14

Punînd condiția ca cele două volume să fie egale se obține $x = a/3$, deci $\|AL\| = a/3$.

b) Limita sumei ariilor este $2a^2$.

b) Limita sumei perimetrelor este $4a(2 + \sqrt{2})$.

19. Fie π' planul perpendicular în A pe dreapta d_3. Dreapta Δ, proiecția lui d_1 pe planul π, va fi inter-

Scanned with OKEN Scanner

secția planelor π și π' deoarece π' trece prin d_1 și este perpendicular pe d_3 (vezi fig. VII.15). Notăm $\{B\} = d_2 \cap \pi$. Deoarece proiecția punctului B pe planul π'

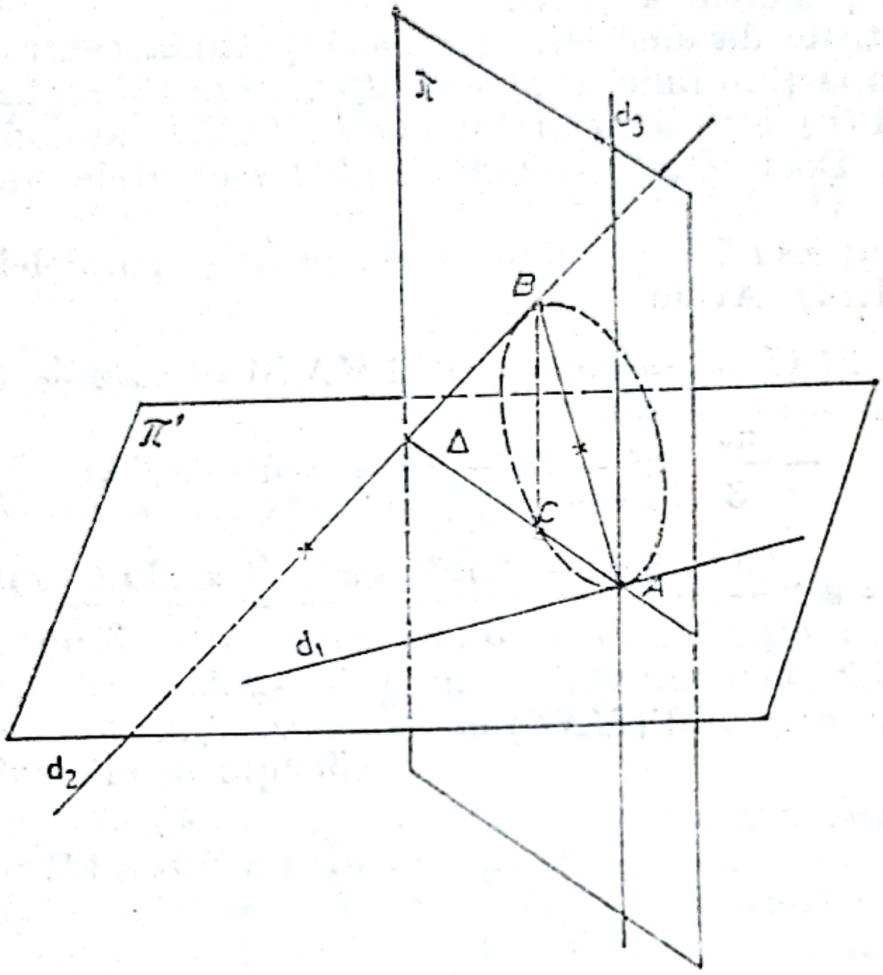


Fig. VII.15

este un punct C care aparține dreptei Δ, rezultă că intersecția proiecțiilor dreptelor d_1 și d_2 pe planul π' este punctul C, deoarece punctul C aparține și proiecției lui d_1 și proiecției lui d_2. Locul lui C este cercul de diametru $|AB|$ din planul π. Dacă $d_2 \| \pi'$, atunci $d_2 \cap \pi = \{\emptyset\}$ iar proiecția lui d_2 pe planul π este o dreaptă paralelă cu Δ și cele două proiecții nu se intersectează.

20. a) Fie A_i și B_i vîrfurile omoloage de ordinul i, începînd de la A_1, respectiv, B_1, în sensuri diferite, ale celor două poligoane. Diagonalele $|A_1A_i|$ și $|B_1B_i|$ fiind omoloage ele fac unghiuri egale și de sens contrar cu $|A_1B_1|$, deci sînt paralele (vezi fig. VII.16). Cînd punctul M se deplasează pe $|A_1B_1|$, dreptele A_1A_i și

Scanned with OKEN Scanner

B_1B_i fac același unghi constant cu segmentul $|A_1B_1|$, adică rămîn fixe. Locul geometric al vîrfurilor omoloage este deci format din dreptele paralele care aparţin celor două fascicole de centre A_1 respectiv B_1.

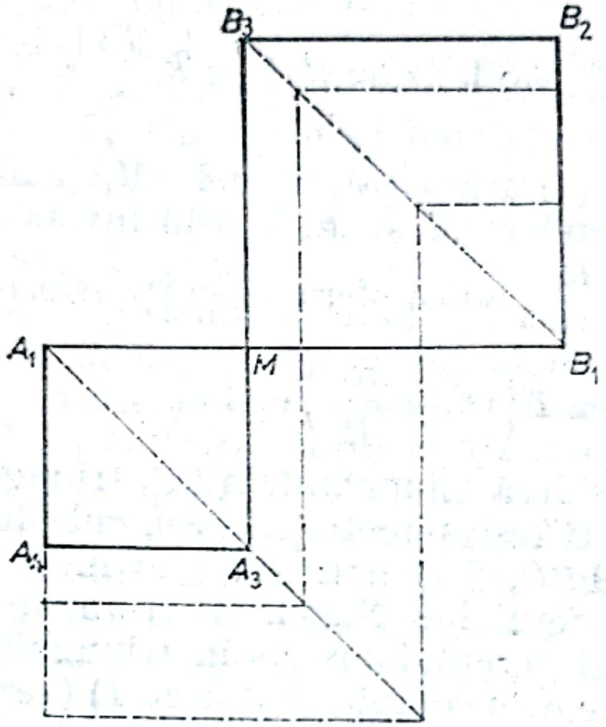


Fig. VII.16

b) Poligoanele (A_i) și (B_i) fiind asemenea, dreptele omoloage MA_i și MB_i fac unghiuri congruente cu $|A_1B_1|$. Punctele A_i și B_i fiind situate pe drepte ce trec prin M și $\|MA_i\| / \|MB_i\| = \|MA_1\| / \|MB_1\|$ rezultă că laturile omoloage sînt paralele, deci (A_i) și (B_i) sînt omotetice în omotetia de centru M și raport $\|MA_1\| / \|MB_1\|$.

21. Fie O' și O_1' centrele de omotetie ale celor două sfere și S un punct ce aparţine dreptei ce trece prin O' și O_1' și taie sferele în punctele M, M', respectiv, M_1, M_1'. Avem

$$\frac{\|SM_1\|}{\|SM\|} = \frac{R_1}{R} \quad \text{și} \quad \frac{\|SM_1'\|}{\|SM'\|} = \frac{R_1}{R}. \tag{1}$$

Dacă notăm

$$k = \|SM\| \cdot \|SM'\|, \tag{2}$$

înmulțind (1) cu (2) obținem

$$\|SM'\| \cdot \|SM_1\| = k\frac{R_1}{R} \tag{3}$$

și la fel

$$\|SM\| \cdot \|SM_1'\| = k\frac{R_1}{R}. \tag{4}$$

Relațiile (3) și (4) arată că punctele M_1 și M_1' sînt transformatele punctelor M și M' prin inversiunea I de pol S și putere $k\cdot\frac{R_1}{R}$, adică sfera $\mathscr{S}$ se transformă în sfera $\mathscr{S}_1$ prin inversiunea $I\left(O', k\frac{R_1}{R}\right)$.

22. Se consideră triunghiul ABC, triunghiul său antimedian $A''B''C''$ și punctele G, centrul de greutate al triunghiului ABC, I centrul cercului înscris triunghiului ABC și N, punctul lui Nagel, al triunghiului ABC (N fiind și centrul cercului înscris în triunghiul antimedian cu raza $2r$, este deci complementar cu I) (vezi fig. VII.17).

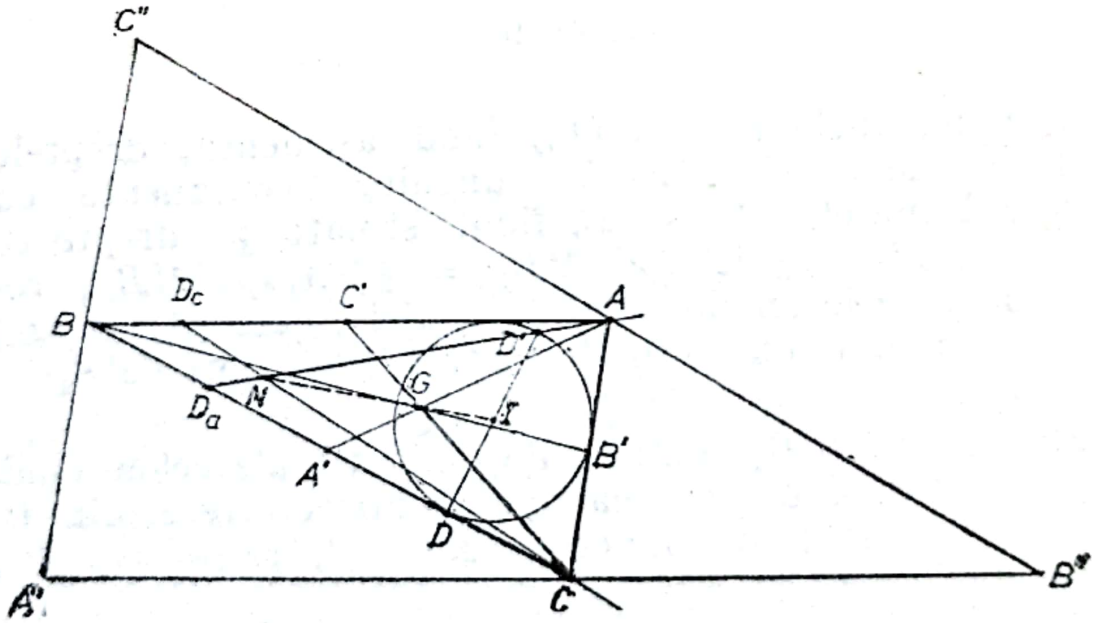


Fig. VII.17

Triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sînt omotetice avînd centrul de omotetie în G. Segmentul de dreaptă $|NI|$ trece prin centrul de omotetie, deci punctele N, G și I sînt coliniare. Punctele N și I fiind omologice în triun-

Scanned with OKEN Scanner

ghiurile ABC și $A'B'C'$ raportul de omotetie va fi $\frac{\|IG\|}{\|NG\|} = -\frac{1}{2}$; $\|NG\| = 2\|GI\|$. Ceviana AND_a trece prin punctul D', diametral opus lui D în cercul înscris, căci razele $|ID'|$ și $|I_aD_a|$ sînt omoloage (I_a fiind centrul cercului înscris tangent la BC) deoarece cercurile cu centrele în I și I_a sînt direct omotetice. Extremitățile sînt puncte omoloage și deci $|D_aD'|$ va trece prin centrul de omotetie A. Punctele D_a și D sînt simetrice față de mijlocul A' al lui $|BC|$.

Construcție. Construim cercul de rază $|ID|$ înscris triunghiului ABC, ducem, perpendiculară pe ID și tangentă la cerc, o dreaptă pe direcția lui BC. Prelungind pe $|IG|$ cu $\|NG\| = 2\|IG\|$ obținem punctul lui Nagel N. Dreapta care trece prin N și D' taie dreapta Δ tangentă în D' la cerc) în punctul D_a. Cunoscînd D și D_a și luînd mijlocul segmentului $|DD_a|$ aflăm piciorul medianei $|AA'|$, adică mijlocul laturii $|BC|$. Prelungind $|A'G|$ cu $\|AG\| = 2\|A'G\|$ obținem vîrful A. Ducînd din A tangente la cercul de rază $|ID|$, acestea vor tăia pe Δ în B și C și astfel sînt determinate vîrfurile triunghiului ABC.

23. Se obține $|MN|$ rotind pe $|AC|$ în jurul lui B cu $60°$; deci $|MN| \equiv |AC|$. Analog, se obține $|PQ|$ rotind pe $|AC|$ cu $60°$ în jurul lui D; deci $|PQ| \equiv |AC|$ (vezi fig. VII.18). Rezultă că

$$|MN| \equiv |PQ| \text{ și } |MQ| \equiv |PN|.$$

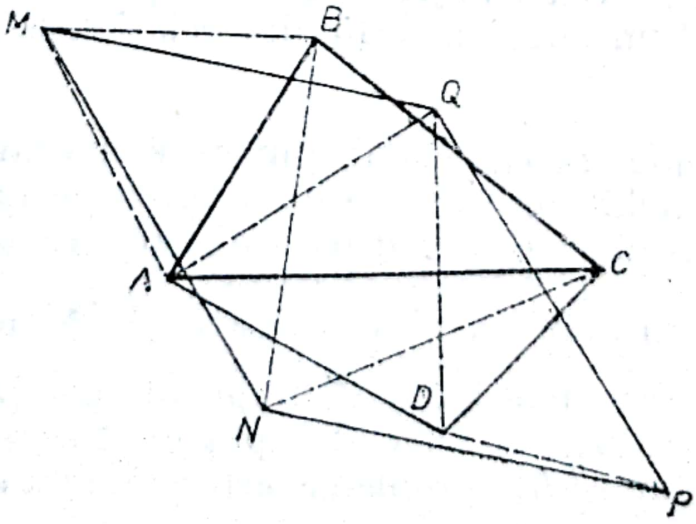


Fig. VII.18

Deducem că figura $MNPQ$ poate fi paralelogram sau trapez isoscel. Ultima posibilitate este eliminată de observația că $|PQ|$ se obține rotind $|AC|$ în același sens față de D în care a fost rotită $|AC|$ față de B pentru a obține $|MN|$, deci $MN \| PQ$.

24. Fie punctul O centrul pătratului dat. Deoarece pătratul este invariat de rotațiile de centru O și unghi: 90°, 180°, 270°, cît și de simetriile în raport cu cele două drepte ce trec prin O și sînt paralele cu laturile pătratului, rezultă că întreaga figură este invariată față de aceste transformări. Aplicînd în mod convenabil una sau două din transformări, putem aduce oricare din mijloacele celor opt segmente peste oricare altul dintre ele (vezi fig. VII.19). Aplicînd rotațiile menționate, observăm că

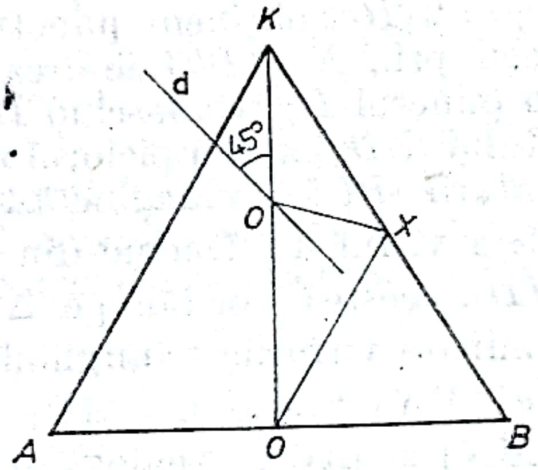


Fig. VII.19

mijloacele celor patru segmente $|KL|$, $|LM|$, $|MN|$ și $|NK|$ formează un pătrat cu centrul în O. Segmentul ce unește punctul O cu mijlocul lui $|KL|$ formează cu segmentul $|OK|$ un unghi $\alpha = 45°$ de același sens cu unghiul $\widehat{AOB}$.

Vom demonstra că cele 12 puncte sînt egal depărtate de O și că unghiurile formate de dreptele ce unesc aceste puncte cu O sînt de 30°, deoarece $360° / 12 = 30°$. Prin urmare, dacă arătăm că $\|OX\| = \|OK\| \frac{\sqrt{2}}{2}$ și măs$(\widehat{XOQ}) = 75°$ (unde am notat cu X mijlocul lui $|BK|$, cu Q mijlocul lui $|AB|$, iar cu d dreapta ce unește centrul O cu mijlocul lui $|KL|$) problema este rezolvată. În baza

raţionamentului anterior avem $\|OQ\| = \frac{1}{2}\|AB\| = \frac{1}{2}\|AK\| = \|QX\|$. Rezultă că triunghiul OQX este isoscel şi $\widehat{XOQ} = \frac{1}{2}[180° - \text{măs}(\widehat{XQO})] = \frac{1}{2}[180 - (\text{măs}(\widehat{OQB}) - \text{măs}(\widehat{XQB}))] = \frac{1}{2}[180° - (90° - 60°)] = 75°$. Considerăm triunghiul OKX în care avem $\text{măs}(\widehat{OKX}) = 30°$; deci înălţimea din O este egală cu $\frac{1}{2}\|OK\|$, iar $\text{măs}(\widehat{OXK}) = \text{măs}(\widehat{QOX}) - 30° = 75° - 30° = 45°$. Deci $\|OX\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\|OK\|$, ceea ce trebuia demonstrat.

25. Considerăm inversiunea $I(P, K^2)$, $K^2 = \|PA\| \cdot \|PB\|$. Deoarece $K^2 = \|PD\| \cdot \|PC\|$ rezultă că punctul C este inversul lui D în inversiunea considerată. Cînd punctul C descrie mediatoarea $|CC'|$ (care, evident, este perpendiculară pe dreapta PB), punctul D, inversul lui C, va descrie un cerc care trece prin polul P al inversiunii (vezi fig. VII.20).

26. Conform ipotezei cercurile $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ şi $\mathscr{C}'_1$, $\mathscr{C}'_2$ fiind secante şi, respectiv, tangente au $O_1O_2 \perp AB$ şi $O'_1O'_2 \perp$

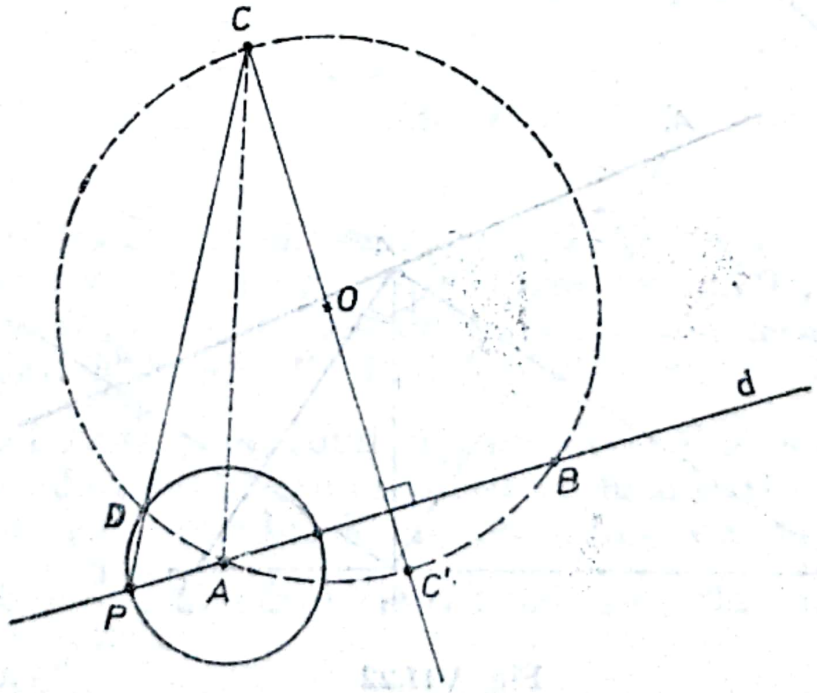


Fig. VII.20

$\perp AB$ (vezi fig. VII. 21). Rezultă că dreapta AB este axă de simetrie. Atunci și punctele C și E, respectiv, D și F sînt simetrice față de AB. Din motive de simetrie rezultă că dreptele AB, CD și EF sînt concurente.

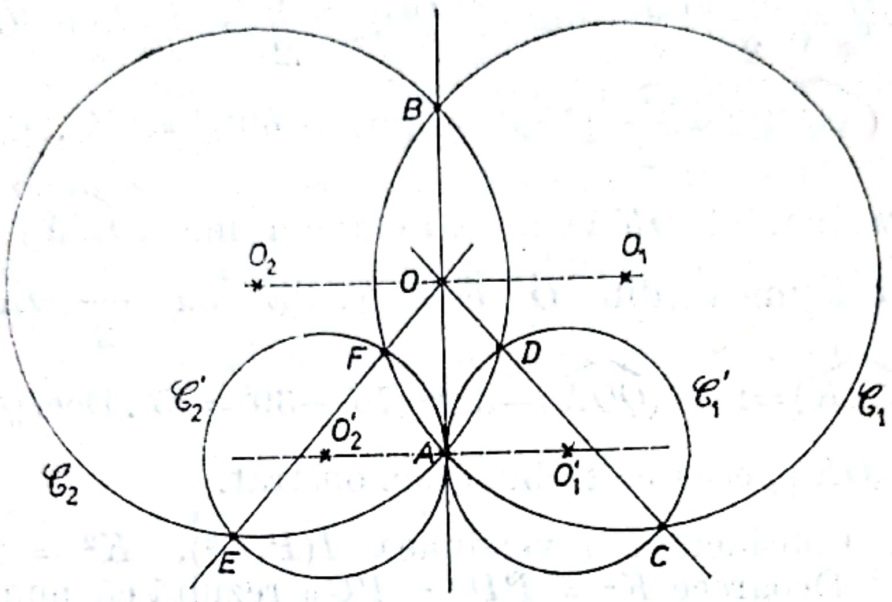


Fig. VII.21

27. Din motive de simetrie $\widehat{A_1AB} \equiv \widehat{BAA_1''}$ și analog $\widehat{A_1AC} \equiv \widehat{CAA_1''}$ (vezi fig. VII.22). Deoarece măs $(\widehat{BAA_1}) +$

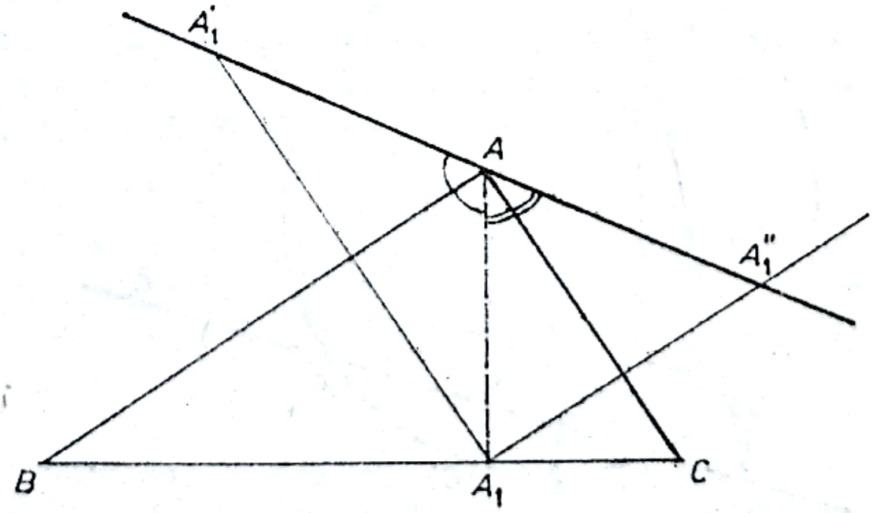


Fig. VII.22

$+$ măs $(\widehat{A_1AC}) = 90°$, rezultă că avem şi măs $(\widehat{B'AA_1'}) +$ $+$ măs $(\widehat{CAA_1''}) = 90°$. Deducem că

$$\text{măs}\,(\widehat{A_1'AB}) + \text{măs}\,(\widehat{BAA_1}) + \text{măs}\,(\widehat{A_1AC}) +$$

$$+ \text{măs}\,(\widehat{CAA_1''}) = 180°,$$

adică punctele A_1', A şi A_1'' sînt coliniare.

28. Fie M mijlocul coardei $|CD|$. Dacă secanta d se roteşte, avînd ca centru de rotaţie punctul fix A prin care trece, atunci punctul M va descrie un loc geometric ce trebuie iniţial determinat. Triunghiul OMA fiind dreptunghic (măs $(\hat{M}) = 90°$) (vezi fig. VII. 23), iar AO fixă,

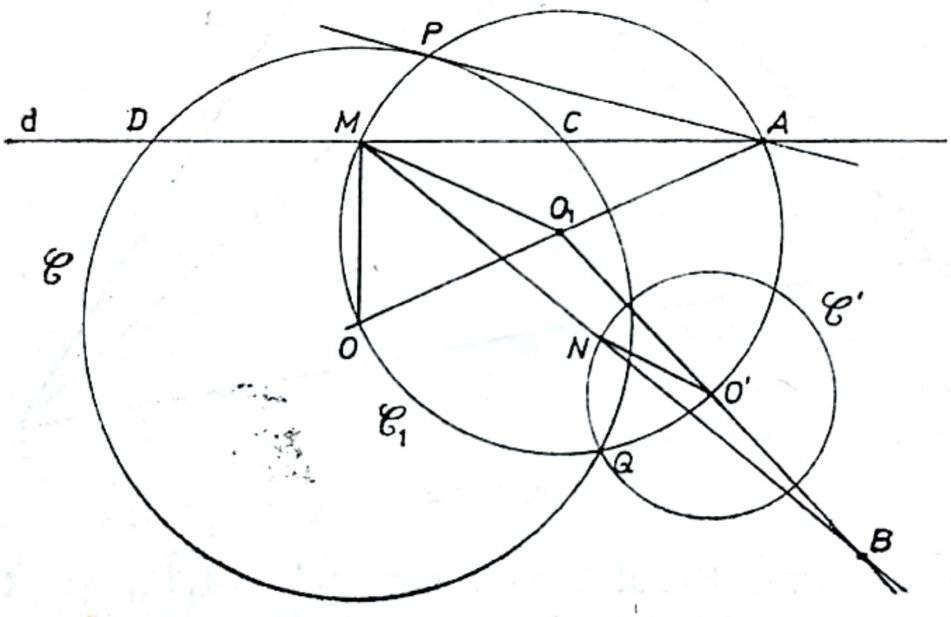


Fig. VII.23

rezultă că locul lui M este arcul $\widehat{POQ}$, arc ce face parte din cercul $\mathscr{C}_1$, de centru O_1 şi diametru $|AO|$, iar punctele P şi Q sînt punctele de tangenţă ale secantei d cu cercul dat. Punctul B fiind fix, atunci cînd M va descrie arcul $\widehat{POQ}$ al cercului $\mathscr{C}_1$, mijlocul N al segmentului $|BM|$ va descrie un arc omotetic ce face parte din cercul $\mathscr{C}'$, omoteticul cercului $\mathscr{C}_1$ în omotetia de centru B şi raport $k = \frac{1}{2}$, al cărui centru O' se află la mijlocul lui $|BO_1|$.

Scanned with OKEN Scanner

Raţionamente analoage se fac atunci cînd punctul fix A se află pe cercul $\mathscr{C}$ sau chiar în O, iar punctul B se află în exteriorul cercului $\mathscr{C}_1$, sau cînd B se află pe cercul $\mathscr{C}_1$ în interiorul său sau chiar în O_1.

29. Din $CC_1 \perp AB$ şi $BB_1 \perp AC$ rezultă că $|AH|$ este diametrul cercului AB_1HC_1 (vezi fig. VII.24). În triunghiul $A_1B_1C_1$ segmentele $|A_1A'|$, $|B_1B'|$ şi $|C_1C'|$

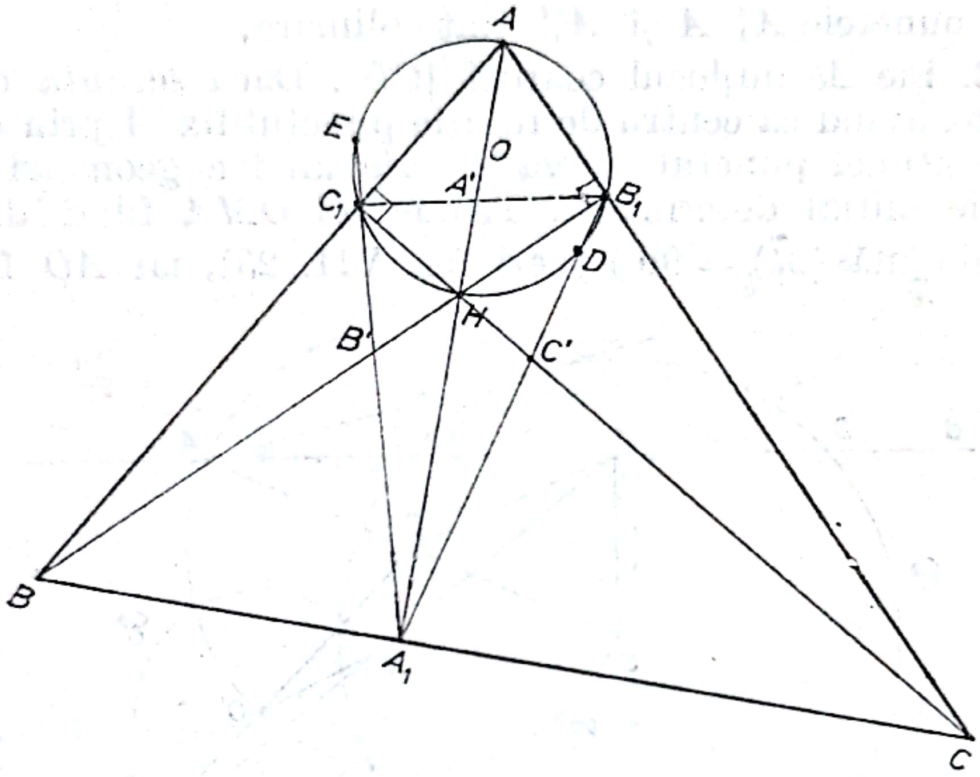


Fig. VII.24

sînt bisectoare. Rezultă că segmentele $|A_1B_1|$ şi $|A_1C_1|$, care taie cercul AB_1HC_1, respectiv, în D şi E sînt simetrice în raport cu $|AA_1|$, care trece prin centrul O al cercului AB_1HC_1. Din motive de simetrie rezultă că

$$|B_1D| \equiv |C_1E|, \text{ deci } |A_1B_1| \equiv |A_1E| \text{ şi}$$

$$|A_1C_1| \equiv |A_1D|.$$

30. Stabilim iniţial poziţiile punctelor M pe $|AB|$ şi N pe $|BC|$ astfel ca $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$, şi construim $MP \parallel BN$. Patrulaterul $MBNP$ este dreptunghi, iar AMP este triunghi dreptunghic isoscel (măs $(\hat{A}_1) = 45°$ deoarece $|MA| \equiv |MP|$). Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului. Cînd M parcurge latura $|AB|$ iar N latura $|BC|$, rezultă

Scanned with OKEN Scanner

că punctul P va descrie diagonala $|AC|$ a pătratului (vezi fig. VI.25). Prin omotetie, punctul O va descrie paralela $|A'B'|$ la $|AC|$, care unește mijloacele laturilor

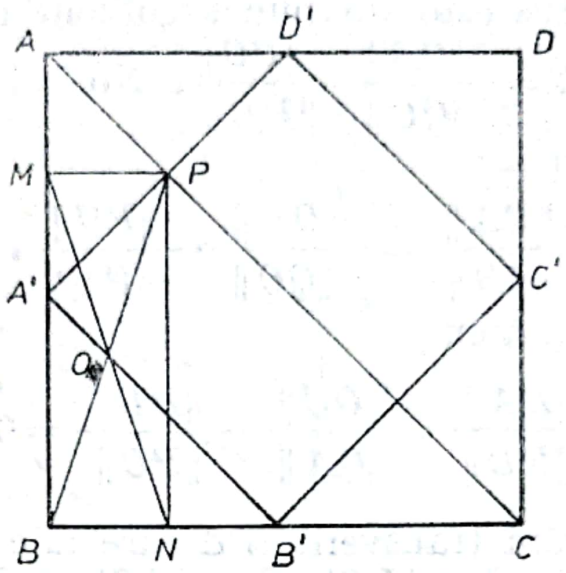


Fig. VII.25

$|AB|$ și $|BC|$. Printr-un raționament analog aplicat fiecărei perechi de laturi găsim că locul geometric este pătratul $A'B'C'D'$.

Pentru un poligon regulat convex raționamentul se face analog ($\hat{A}_1 = 360°/2n$, n fiind numărul laturilor poligonului) și se găsește că locul geometric este un poligon convex regulat ce-l obținem unind mijloacele laturilor consecutive.

31. a) Presupunem relația adevărată și demonstrăm coliniaritatea punctelor P, Q și R (vezi fig. VII.26).

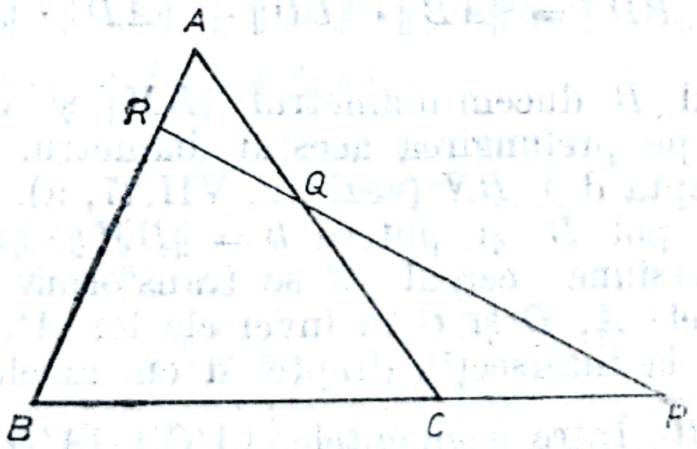


Fig. VII.26

Fie punctul $P \in |BC|$. Omotetia H_1 de centru P și raport $\|PC\| / \|PB\|$ transformă pe B în C. Analog, pentru

Scanned with OKEN Scanner

$Q \in |AC|$, omotetia H_2 de centru Q şi raport $\|QA\| / \|QC\|$ transformă pe C în A. Prin compunerea omotetiilor H_1 şi H_2 punctul B se transformă în A. Centrul de omotetie al acestui produs este un punct coliniar cu P şi Q, iar raportul va fi $k = \dfrac{\|QA\|}{\|QC\|} \dfrac{\|PC\|}{\|PB\|}$. Notînd cu $R \in |AB|$ acest punct avem

$$\frac{\|RA\|}{\|RB\|} = \frac{\|QA\|}{\|QC\|} \cdot \frac{\|PC\|}{\|PB\|},$$

relaţie echivalentă cu

$$\frac{\|RA\|}{\|RB\|} \cdot \frac{\|QC\|}{\|QA\|} \cdot \frac{\|PB\|}{\|PC\|} = 1.$$

b) Considerăm transversala d care taie laturile triunghiului ABC în $P \in |BC|$, $Q \in |AC|$ şi $R \in |AB|$. Din teorema directă rezultă că pe $|AB|$ există un punct R' care verifică relaţia lui Menelaus, adică

$$\frac{\|PB\|}{\|PC\|} \cdot \frac{\|QC\|}{\|QA\|} \cdot \frac{\|R'A\|}{\|R'B\|} = 1;$$

punctul R' fiind unic, rezultă $R' = R$ şi prin urmare R este coliniar cu P şi Q.

32. Fie patrulaterul $ABCD$ convex înscris în cercul $\mathscr{C}(O, r)$; trebuie să arătăm că

$$\|AC\| \cdot \|BD\| = \|AB\| \cdot \|DC\| + \|AD\| \cdot \|BC\|.$$

Prin punctul B ducem diametrul $|BM|$ şi considerăm punctul N pe prelungirea acestui diametru. Construim prin N dreapta $d \perp BN$ (vezi fig. VII.27, a). Fie inversiunea I de pol B şi putere $k = \|BM\| \cdot \|BN\|$. Prin această inversiune cercul $\mathscr{C}$ se transformă în dreapta d, iar punctele A, D şi C în inversele lor A', D' şi C', ce se găsesc la intersecţia dreptei d cu razele vectoare $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{BC}$. Între segmentele $|A'C'|$, $|A'D'|$ şi $|D'C'|$ determinate de punctele A', D' şi C' pe dreapta d, vom scrie relaţia

$$\|A'C'\| = \|A'D'\| + \|D'C'\|. \qquad (1)$$

Deoarece $A' = I(A)$ şi $D' = I(D)$ vom avea $\|BA\| \cdot \|BA'\| = k$ şi $\|BD\| \cdot \|BD'\| = -k$. Deci $\|BA\| \cdot \|BA'\| = \|BD\| \cdot \|BD'\|$ şi deoarece $\Delta ABD \sim \Delta A'BD'$ va rezulta că

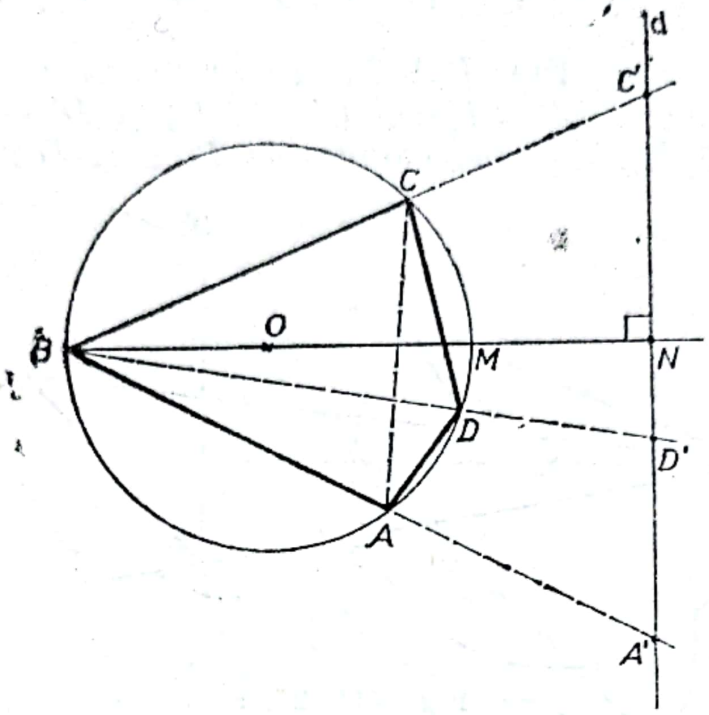


Fig. VII.27. a

$\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'BD'}$ şi vom avea $\|BD\| / \|BA'\| = \|AD\| / \|A'D'\|$, deci $\|A'D'\| = \dfrac{\|AD\| \cdot \|BA'\|}{\|BD\|}$. Dar $\|BA'\| = k / \|BA\|$ şi atunci

$$\|A'D'\| = \frac{k \cdot \|AD\|}{\|BD\| \cdot \|BA\|}. \tag{2}$$

În mod asemănător obţinem

$$\|D'C'\| = \frac{k \cdot \|DC\|}{\|BD\| \cdot \|BC\|} \tag{3}$$

şi

$$\|A'C'\| = \frac{k \cdot \|AC\|}{\|BA\| \cdot \|BC\|}. \tag{4}$$

Înlocuind relaţiile (2), (3) şi (4) în relaţia (1) şi efectuînd calculele obţinem relaţia din enunţ, adică

$$\|AC\| \cdot \|BD\| = \|AD\| \cdot \|BC\| + \|DC\| \cdot \|AB\|.$$

În cazul în care patrulaterul nu este convex, egalitatea din enunț devine inegalitate, adică

$$\|AC\| \cdot \|BD\| \leqslant \|AB\| \cdot \|DC\| + \|AD\| \cdot \|BC\|$$

Demonstrație. Fie $I(A, k)$ inversiunea de pol A și putere k; avem $B' = I(B)$, $C' = I(C)$ și $D' = I(D)$ (vezi fig. VII. 27, b). Deoarece punctele B, C și D nu sînt con-

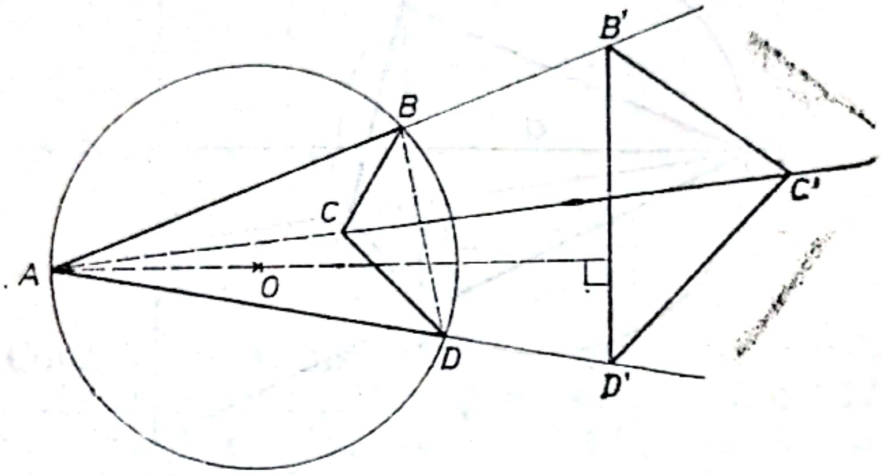


Fig. VII. 27, b

ciclice (patrulaterul nefiind inscriptibil) rezultă că nici inversele lor B', C' și D' nu mai sînt coliniare și atunci are loc inegalitatea

$$\|B'D'\| \leqslant \|B'C'\| + \|C'D'\|. \qquad (1)$$

Ținînd seama de relația cunoscută $\|M'N'\| = \dfrac{k \cdot \|MN\|}{\|OM\| \cdot \|ON\|}$ și făcînd substituția în (1) obținem

$$\frac{k \cdot \|BD\|}{\|AB\| \cdot \|AD\|} \leqslant \frac{k \cdot \|BC\|}{\|AB\| \cdot \|AC\|} + \frac{k \cdot \|CD\|}{\|AC\| \cdot \|AD\|},$$

care este echivalentă cu relația din enunț, adică cu

$$\|AC\| \cdot \|BD\| \leqslant \|AB\| \cdot \|DC\| + \|AD\| \cdot \|BC\|.$$

33. Fie triunghiul oarecare ABC în care notăm cu P, M și N mijloacele segmentelor $|AB|$, $|AC|$ și, respectiv, $|BC|$. Triunghiul median MNP avînd laturile paralele cu laturile triunghiului ABC, el este omotetic cu triunghiul ABC în omotetia de centru G și raport $k =$

$= -1/2$ (vezi fig. VII.28). Deoarece centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului MNP, punctul R va fi omoteticul lui O în aceeaşi omotetie $H(G, -1/2)$. Rezultă că

$$H_{(G,\ -1/2)}(O) = R \quad \text{şi} \quad \frac{\|GO\|}{\|GR\|} = -\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

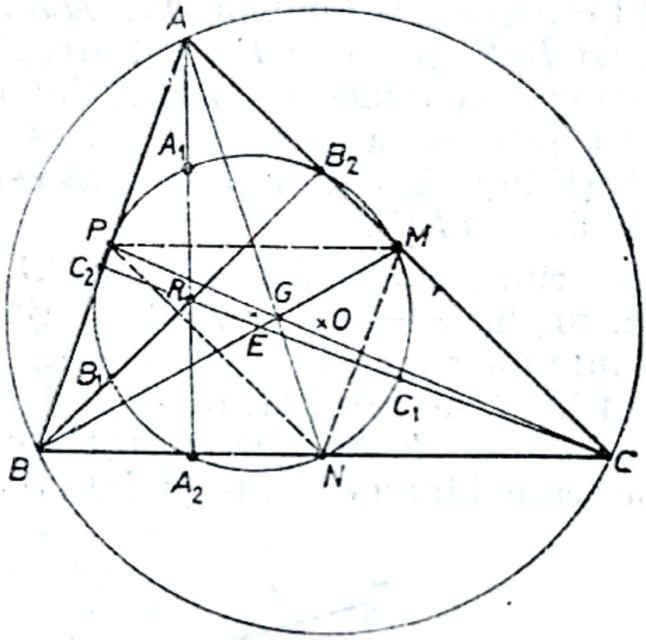


Fig. VII.28

iar G, O şi R sînt coliniare.

Centrul E al cercului circumscris triunghiului MNP este omoteticul lui O, care este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Deci

$$H_{(G,\ -1/2)}(O) = E \quad \text{şi} \quad \|GE\| / \|GO\| = -1/2, \qquad (2)$$

iar E, O şi G sînt coliniare. Rezultă din (1) şi (2) că punctele R, O, G şi E sînt coliniare. Să arătăm că cele nouă puncte aparţin cercului circumscris triunghiului MNP, E fiind centrul cercului lui Euler. Din (1) şi (2)

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$\|RE\| = \frac{3}{4}\|RG\| \text{ şi } \|RO\| = \frac{3}{2}\|RG\|, \text{ deci}$$

$$\|RO\| = 2\ \|RE\|.$$

în omotetia de centru R şi raport $k = 1/2$, omoloagele punctelor A, B, C sînt, respectiv, A_1, B_1, C_1 (mijloacele segmentelor $|RA|$, $|RB|$, $|RC|$). Deci A_1, B_1, C_1 se află pe cercul circumscris triunghiului MNP. Triunghiurile A_2A_1N, B_2B_1M şi C_2C_1P sînt dreptunghice, deci înscrise în cercul circumscris triunghiului MNP. Rezultă că toate cele nouă puncte se găsesc pe cercul cu centrul în E şi de rază $r/2$ (r fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC).

34. Rotim triunghiul echilateral ABC în jurul vîrfului C cu un unghi $\alpha = 60°$; vîrful B ajunge în A iar punctul M într-un punct M'. Observăm că s-a f ormat un triunghi AMM' ale cărui laturi sînt: $|AM|$, $|MM'| \equiv |MC|$ şi $|AM'| \equiv |BM|$, adică distanţele de la punctul M la vîrfurile triunghiului echilateral dat (vezi fig. VII.29).

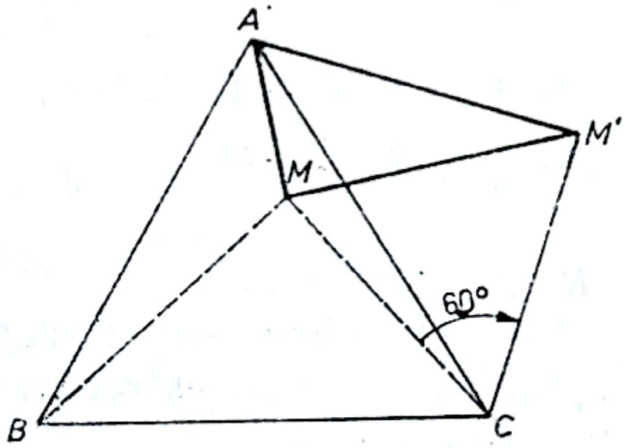


Fig. VII.29

35. În triunghiul ABC fie I şi I_1 centrele cercurilor înscrise şi, respectiv, exînscrise, D şi D_1 punctele lor de contact cu $|BC|$, A' piciorul înălţimii din A, O mijlocul laturii $|BC|$ şi M intersecţia bisectoarei AI_1 cu latura $|BC|$ (fig. VII.30). Punctele A', D, M, D_1 formează

Scanned with OKEN Scanner

o diviziune armonică pe latura $|BC|$. Într-adevăr, dacă E și E_1 sînt contactele cercurilor cu latura $|AC|$, atunci

$$\frac{\|DM\|}{\|MD_1\|} = \frac{\|ID\|}{\|I_1D_1\|} = \frac{\|r\|}{\|r_1\|} = \frac{\|IE\|}{\|I_1E_1\|} =$$

$$= \frac{\|AI\|}{\|AI_1\|} = \frac{\|A'D\|}{\|A'D_1\|}.$$

Punctul O fiind mijlocul laturii $|BC|$ este și mijlocul segmentului $|DD_1|$ deoarece $|BD| = |CD_1|$. Conform unei proprietăți a diviziunii armonice avem

$$\|OA'\| \cdot \|OM\| = \|OD\|^2 = \|OD_1\|^2.$$

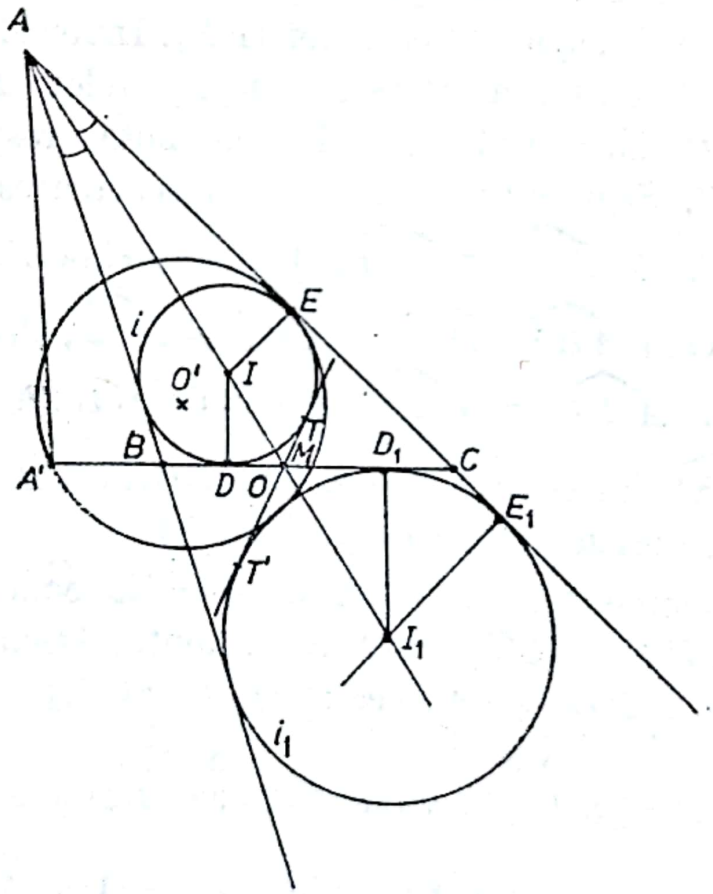


Fig. VII.30

Observăm că tangenta în O la cercul celor nouă puncte este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscris, deci este o antiparalelă, adică paralelă cu simetrica laturii $|BC|$ față de bisectoarea AII_1. Această simetrică a tangentei

comune $|DD_1|$ față de linia centrelor $|II_1|$ este a doua tangentă comună a cercurilor notate cu i și i_1. Ea trece prin punctul M și fie T și T_1 punctele ei de contact. Efectuăm o transformare prin inversiunea de pol O și putere $\|OD\|^2 = \|OD_1\|^2$; cercurile i și i_1 sînt invariate; cercul celor nouă puncte trecînd prin O devine o dreaptă; trecînd prin A' dreapta transformată trece prin M, inversul punctului A'; avînd tangenta paralelă cu TT_1, dreapta transformată este însăși tangenta comună TT_1. Punctele de tangență se numesc *punctele lui Feurbach*.

36. Considerăm inversiunea de pol B și de putere k. Prin inversiunea $I(B, k)$ dreapta AC se transformă în cercul $\mathscr{C}$ de centru O care trece prin polul B al inversiunii. Fie $|BD|$ și $|BE|$ simetrice bisectoarei $|BF|$. Inversele punctelor A, D, E și C se află la intersecția segmentelor $|BA|$, $|BD|$, $|BE|$ și $|BC|$ cu cercul $\mathscr{C}$, și le vom nota, respectiv, A', D', E' și C'. Segmentul $|BF|$ fiind biseectoarea unghiului ABC rezultă că $\widehat{ABF} \equiv \widehat{CBF}$. Datorită simetriei $\widehat{DBF} \equiv \widehat{EBF}$. Avem $\widehat{ABF} - \widehat{DBF} = \widehat{CBF} - \widehat{EBF}$, deci $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CBE}$ sau $\widehat{A'BD'} \equiv \widehat{C'BE'}$, de unde rezultă că arcele $\widehat{A'D'}$ și $\widehat{C'E'}$ sînt congruente și deci coardele $A'D'$ și $C'E'$ sînt și ele congruente (vezi fig. VII.31).

Un raționament asemănător ne duce la concluzia că și coardele $|A'E'|$ și $|C'D'|$ sînt congruente, Deoarece $A' = I(A)$ și $D' = I(D)$ vom avea:

$$\|BA\| \cdot \|BA'\| = k \quad \text{și} \quad \|BD\| \cdot \|BD'\| = k$$

din care rezultă că $\|BA\| \cdot \|BA'\| = \|BD\| \cdot \|BD'\|$. Prin urmare $\Delta ABD \sim \Delta BA'D'$, de unde deducem că $\|BA\| / \|BD'\| = \|BD\| / BA'\| = \|AD\| / \|A'D'\|$ și deci

$$\|A'D'\| = \frac{\|AD\| \cdot \|BD'\|}{\|BA\|} \qquad (1)$$

În mod analog din $\Delta BEC \sim \Delta BE'C'$ va rezulta

$$\|E'C'\| = \frac{\|EC\| \cdot \|BE'\|}{\|BC\|}. \qquad (2)$$

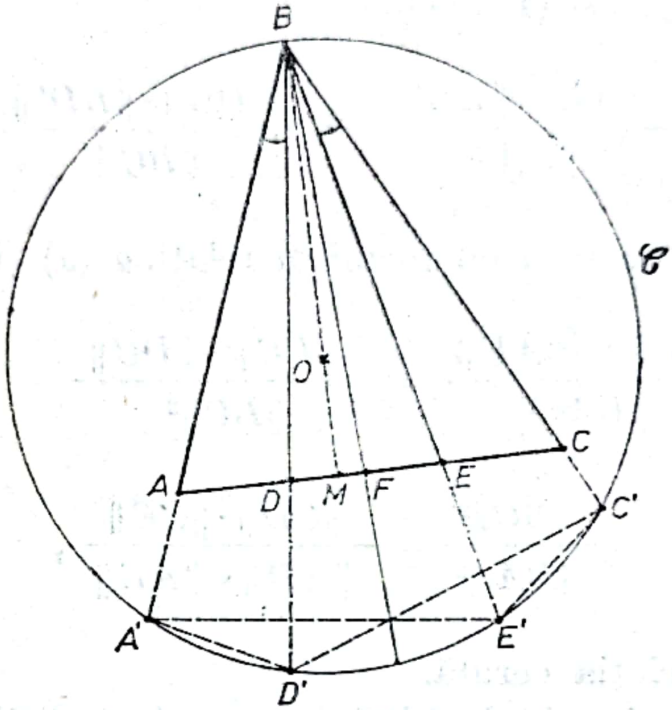


Fig. VII.31

Comparînd (1) și (2) deducem

(a) $$\frac{\|AD\| \cdot \|BD'\|}{\|BA\|} = \frac{\|EC\| \cdot \|BE'\|}{\|BC\|}.$$

Deoarece $A' = I(A)$ și $E' = I(E)$ găsim că $\Delta ABE \sim$ $\sim \Delta BA'E'$, de unde rezultă

$$\|A'E'\| = \frac{\|AE\| \cdot \|BE'\|}{\|BA\|}. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, din $C' = I(C)$ și $D' = I(D)$ avem $\Delta BDC \sim$ $\sim \Delta BD'C'$ din care rezultă

$$\|D'C'\| = \frac{\|DC\| \cdot \|BD'\|}{\|BC\|}. \qquad (4)$$

Comparînd (3) și (4) avem

$$\text{(b)} \qquad \frac{\|AE\| \cdot \|BE'\|}{\|BA\|} = \frac{\|DC\| \cdot \|BD'\|}{\|BC\|}.$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (a) și (b) obținem

$$\frac{\|AD\| \cdot \|AE\|}{\|BA\|^2} = \frac{\|EC\| \cdot \|DC\|}{\|BC\|^2} \qquad \text{sau}$$

$$\frac{\|BC\|^2}{\|BA\|^2} = \frac{\|CD\| \cdot \|CE\|}{\|AD\| \cdot \|AE\|},$$

care este relația cerută.

37. În triunghiul ABC avem: $A_1 \in |BC|$, $B_1 \in |AC|$, $C_1 \in |AB|$ și $\|BA_1\| / \|A_1C\| = \|CB_1\| / \|B_1A\| = \|AC_1\| /$ $/ \|C_1B\|$. Fie punctul N mijlocul lui $|BC|$ și M_1 mijlocul lui $|B_1C_1|$ iar punctul A_2 simetricul lui A_1 față de M; avem $\|BA_1\| / \|A_1C\| = \|CA_2\| / \|A_2B\|$ și rezultă că $|A_2B_1| \|$ $\| |AB|$ iar $|A_2C_1| \| |AC|$; punctul M_1 este centrul de simetrie în paralelogramul $AC_1A_2B_1$, deci mijlocul lui $|AA_2|$. Rezultă că $|A_1M_1|$ este mediană în triunghiul $A_1B_1C_1$ și în triunghiul AA_1A_2, deci triunghiurile au același centru de greutate. Observăm că triunghiurile AA_1A_2 și ABC_1 au aceeași mediană $|AM|$, deci au același centru de greutate. Rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

38. Conform datelor din ipoteză avem:
$\|OP\| \equiv \|OQ\|$, $\|MP\| \equiv \|MQ\|$ și $\|M'P\| \equiv \|M'Q\|$. Punctul O fiind fix, iar $|OP|$ și $|OQ|$ constante, rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

punctele O, M și M' sînt coliniare (vezi fig. VII.32); ele aparţin mediatoarei lui $|PQ|$.

Prin punctele M și M' descriem un cerc cu centrul în P. Produsul constant $\|OM\| \cdot \|OM'\|$ reprezintă puterea punctului O în raport cu acest cerc, adică $\|OP\|^2 - \|PM\|^2$, care va fi constant. Punctul M' este deci inversul lui M în inver-

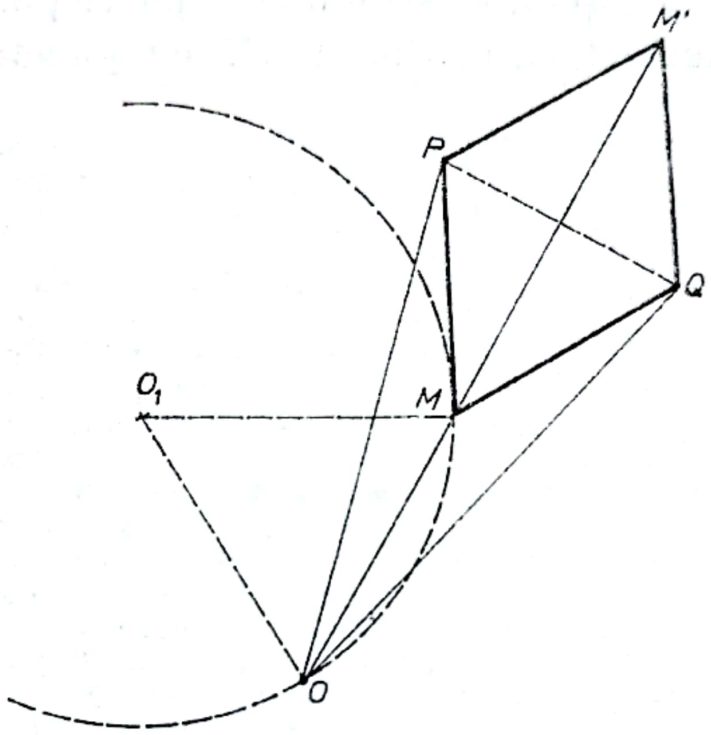


Fig. VII.32

siunea de pol O și putere egală cu puterea lui O faţă de cerc. În baza acestor raţionamente Peaucellier ne prezintă instrumentul, numit inversorul lui Peaucellier, cu care putem descrie drepte utilizînd numai proprietăţile figurilor invariabile.

În figura VII. 32 presupunem că $|OP|$, $|OQ|$, $|PM|$, $|PM'|$, $|QM|$ și $|QM'|$ sînt bare rigide articulate între ele cu punctul O fix. Punctele M și M' sînt inverse în raport cu punctul O. Fie un punct S fix, astfel ca $\|SO\| \equiv \|SM\|$. Dacă legăm cu o bară articulată punctul fix S cu punctul M și obligăm pe M să descrie un cerc, observăm că dacă cercul va trece prin O, atunci punctul M' va descrie o dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

Instrumentul alcătuit conform figurii de mai sus este fixat pe un cadru astfel încît rombul articulat să poată fi deformat iar $|OP|$ și $|OQ|$ să rămînă egale. Pentru utilizarea lui se fixează acul din O într-un anumit punct al planșetei. Cu vîrful M se urmăresc anumite puncte sau linii trasate pe planșetă iar în mod simultan creionul atașat în M' trasează noi puncte sau linii. Indiferent cum va fi montat inversorul pe planșetă, există o inversiune ce pune în corespondență punctele urmărite de M cu punctele trasate de M'.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

Thierré, C., Girard, G. ş.a., Alef O. *Geometrie*, vol. I—vol. IV, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

Hadamard, J., *Lecţii de geometrie elementară*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.

Haimovici, A., *Grupuri de transformări*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

Haimovici, A., ş.a., *Elemente de geometrie a planului*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

Ionescu Bujor, C., *Elemente de transformări geometrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.

Ionescu, D. V., *Complemente de matematică pentru licee*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

Ionescu-Ţiu, C., *Geometrie plană şi în spaţiu pentru admitere în facultate*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1976.

Moise, E., *Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

Mihăileanu, N. N., *Complemente de geometrie sintetică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

Miron, R., D. Brânzei, *Fundamentele aritmeticii şi geometriei*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1983.

Teleman, K., Florescu, M., Moraru, D., Rădulescu, C., Stătescu, E., *Geometrie şi trigonometrie* (manual pentru clasa IX), Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

Ţiţeica, G., *Culegere de probleme de geometrie*, ed. V-a, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1965.

Udrişte, C., Tomuleanu, V., *Geometrie analitică* (Manual pentru clasa XI-a), Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

Scanned with OKEN Scanner